Dipartimento di Matematica Applicata

“Ulisse Dini”

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **16/07/03**

1) Dato il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

studiare la convergenza del metodo iterativo di Gauss-Seidel.

2) Tre ragazzi si passano un pallone cercando di non farlo cadere e con la possibilitá di tirarlo verso un canestro.
I primi due ragazzi passano ad uno degli altri due ragazzi o tirano con uguale probabilitá.
Il terzo ragazzo passa al primo ragazzo, tira o lascia cadere il pallone con uguale probabilitá.
Quando uno dei ragazzi tira il pallone o il pallone cade il gioco termina.

a) Scrivere la matrice di transizione della catena di Markov descritta.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare le probabilitá di assorbimento.

d) Determinare i tempi medi di assorbimento.

3) Una variabile aleatoria X ha la seguente funzione di densitá

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } 0 \le x \le 2\,, \\ kx & \text{se } 2 < x < 3\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

a) Determinare la costante reale k.

b) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.

c) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

Soluzione

1) Si deve calcolare la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel data da $(D-E)^{-1}F$. Da

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & -4/3 & 1 & 0 \\ -8/9 & 7/9 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

segue

$$H_{GS} = (D-E)^{-1}F = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -2 & -3 & -4 \\ \hline 0 & 4/3 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 2/3 & 19/3 & 2/3 \\ 0 & 16/9 & -4/9 & 37/9 \end{array}\right).$$

Poiché il blocco diagonale di ordine 3 ha determinante uguale a 64/9 il metodo non é convergente.

2) Gli stati della catena sono: E_1=RAGAZZO UNO, E_2=RAGAZZO DUE, E_3=RAGAZZO TRE, E_4=PALLONE CADE e E_5=PALLONE TIRATO. La matrice di transizione é

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli stati E_1, E_2, E_3 sono transitori mentre gli stati E_4, E_5 sono assorbenti.
Per determinare le probabilitá di assorbimento nello stato E_4 si risolve il sistema

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 & = & & \frac{1}{3}\lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda_3 \\ \lambda_2 & = & & \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_3 \\ \lambda_3 & = & \frac{1}{3} & + \frac{1}{3}\lambda_1 \end{array}$$

ottenendo

$$\lambda_1 = \frac{1}{5}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{5}, \quad \lambda_3 = \frac{2}{5}.$$

Le probabilitá di assorbimento in E_5 sono

$$\mu_1 = \frac{4}{5}\,, \quad \mu_2 = \frac{4}{5}\,, \quad \mu_3 = \frac{3}{5}\,.$$

I tempi medi di assorbimento si ottengo dalla soluzione del sistema

$$\begin{array}{rclccc}
\eta_1 & = & 1 & & +\frac{1}{3}\eta_2 & +\frac{1}{3}\eta_3 \\
\eta_2 & = & 1 & +\frac{1}{3}\eta_1 & & +\frac{1}{3}\eta_3 \\
\eta_3 & = & 1 & +\frac{1}{3}\eta_1 & &
\end{array}$$

che risulta

$$\eta_1 = \frac{12}{5} = 2.4\,, \quad \eta_2 = \frac{12}{5} = 2.4\,, \quad \eta_3 = \frac{9}{5} = 1.8\,.$$

3) La funzione $f(x)$ é una densitá di probabilitá se $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 kx^2dx + \int_2^3 kxdx = \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[k\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = k\frac{31}{6}$$

si ottiene $k = 6/31$.
Segue

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{6}{31}\left[\int_0^2 x^3dx + \int_2^3 x^2dx\right] = 2\,,$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \frac{6}{31}\left[\int_0^2 x^4dx + \int_2^3 x^3dx\right] = \frac{1359}{310}\,,$$

e

$$Var(X) = \frac{1359}{310} - 4 = \frac{1359 - 1240}{310} = \frac{119}{310}.$$

Infine, la funzione di ripartizione é

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0\,, \\ \frac{2}{31}x^3 & \text{se } 0 \le x \le 2\,, \\ \frac{3}{31}x^2 + \frac{4}{31} & \text{se } 2 < x < 3\,, \\ 1 & \text{se } x \ge 3\,. \end{cases}$$