Dipartimento di Matematica Applicata
"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria
Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **14/07/04**

1) Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} b+1 & 0 & 2b & 2b \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 11 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \quad b \in R,$$

al variare del parametro reale b.
Posto $b = 2$, calcolare il numero di condizionamento $\mu_2(A)$.

2) Una catena di Markov ha matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

a) La catena di Markov risulta riducibile?

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare le probabilità di assorbimento.

d) Determinare i tempi medi di assorbimento.

3) La coppia di variabili X e Y ha la seguente funzione di densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} Ke^{x-y} & \text{se } 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 3\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare la costante reale K.

b) Calcolare le densità marginali indicando se le due variabili sono indipendenti.

c) Calcolare $P(Y \le 2)$.

Soluzione

1) La matrice data ha equazione caratteristica

$$\lambda^4 - (26+b)\lambda^3 + (168+9b)\lambda^2 - (262+15b)\lambda + 119 + 7b = 0 \,.$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = 1 \,, \quad \lambda_3 = 7 \,,\ \lambda_4 = 17 + b \,.$$

Posto $b = 2$, la matrice risulta reale e simmetrica per cui il numero di condizionamento é

$$\mu_2(A) = \frac{\max_i \mid \lambda_i \mid}{\min_i \mid \lambda_i \mid} = \frac{19}{1} = 19 \,.$$

2) La catena risulta riducibile.
Indicando con $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6,$ gli stati della catena, si hanno due classi chiuse $C^{(1)} = \{E_2, E_5\}$, $C^{(2)} = \{E_4, E_6\}$ e due stati transitori E_1 e E_3.
Le probabilità di assorbimento nella classe chiusa $C^{(1)}$ sono

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{1}{2} \,, \quad \lambda_3^{(1)} = \frac{1}{2} \,.$$

Le probabilitá di assorbimento nella classe chiusa $C^{(2)}$ sono, ovviamente,

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{1}{2} \,, \quad \lambda_3^{(2)} = \frac{1}{2} \,.$$

I tempi medi di assorbimento sono

$$\eta_1 = \frac{31}{24} \,, \quad \eta_3 = \frac{35}{24} \,.$$

3) La costante K si determina imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ per cui $K = \frac{1}{(e-1)(1-e^{-3})}$.
Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^3 K e^{x-y} dy = \frac{1}{e-1} e^x \,,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 K e^{x-y} dx = \frac{1}{1-e^{-3}} e^{-y} \,.$$

Le due variabili sono indipendenti.
Poiché le due variabili sono indipendenti, la probabilità cercata é data da

$$\int_0^2 f_Y(y)dy = \frac{1-e^{-2}}{1-e^{-3}} \,.$$