Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **16/09/04**

1) Studiare l'equazione
$$e^{-x} - x^3 + 3x^2 - 3 = 0$$
indicando il numero delle radici reali e i relativi intervalli di separazione. Approssimare le radici con un massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$ utilizzando il metodo di Newton (dopo averne studiato la convergenza).

2) Si hanno 3(tre) urne, indicate con A, B, C, contenenti rispettivamente

Urna	A	$\Longrightarrow$	2 palline rosse	1 pallina bianca	3 palline nere
Urna	B	$\Longrightarrow$	1 pallina rossa	1 pallina bianca	4 palline nere
Urna	C	$\Longrightarrow$	4 palline rosse	3 palline bianche	1 pallina nera

Si estrae una pallina da un'urna e si reinserisce nell'urna proseguendo le estrazioni dall'urna A se si é estratta una pallina bianca, dall'urna B se é uscita una pallina rossa, dall'urna C nel caso di una pallina nera.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov?
b) La catena é riducibile?
c) Classificare gli stati della catena di Markov.
d) Supponendo di iniziare le estrazioni dall'urna A, qual é la distribuzione di probabilitá dopo due estrazioni?
e) Qual é la probabilitá di avere una pallina nera dopo 4000 estrazioni?

3) Una variabile aleatoria X ha la seguente funzione di densitá
$$f(x) = \begin{cases} Kx & \text{se } 0 \leq x \leq 1\,, \\ \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } 1 < x \leq 4\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare la costante reale K.
b) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.
c) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

Soluzione

1) Con una separazione grafica si evidenziano 3 soluzioni reali della equazione assegnata separate dai seguenti intervalli:

$$\alpha_1 \in]-1,0[\,, \quad \alpha_2 \in]1.2,1.5[\,, \quad \alpha_3 \in]2,3[\,.$$

Considerando $f(x) = e^{-x} - x^3 + 3x^2 - 3$, le derivate $f'(x) = -e^{-x} - 3x^2 + 6x$, $f''(x) = e^{-x} - 6x + 6$ risultano di segno costante sugli intervalli di separazione considerati per cui il metodo di Newton converge sicuramente se si sceglie un opportuno valore iniziale x_0.
Applicando il metodo si arriva ad avere

$$\begin{aligned} x_0 = -1 &\implies \alpha_1 \in]-0.59, -0.58[\\ x_0 = 1.2 &\implies \alpha_2 \in]1.24, 1.25[\\ x_0 = 3 &\implies \alpha_3 \in]2.55, 2.56[\end{aligned}$$

2) Indicati con $E_1 = A$, $E_2 = B$, $E_3 = C$, gli stati della catena, la matrice di transizione risulta

$$T = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 3/8 & 1/2 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

La catena non é riducibile per cui gli stati sono tutti transitori (si ha una unica classe chiusa).
Posto $p^{(0)} = (1,0,0)$, si ottiene $p^{(1)} = \frac{1}{6}(1,2,3)$ e $p^{(2)} = \frac{1}{144}(39,52,53)$.
La distribuzione limite π che verifica $\pi = \pi T$ é $\pi = \frac{1}{227}(57,78,92)$ per cui la probabilitá richiesta é $\frac{92}{227}$.

3) La costante K si determina imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ per cui $K = 2/3$.
Con semplici calcoli si ricavano

$$E[X] = \frac{16}{9}\,, \quad E[X^2] = \frac{43}{10}\,, \quad Var(X) = \frac{923}{810}\,.$$

La funzione di ripartizione $F(x)$ risulta

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{3}x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{1}{3} & \text{se } 1 < x \le 4 \\ 1 & \text{se } 4 < x \end{cases}.$$