Dipartimento di Matematica Applicata

“Ulisse Dini”

Metodi Matematici per l’Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **20/09/06**

1) Determinare i pesi a_0, a_1 ed il valore x_0 in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(1-x_0) + E(f)$$

abbia grado di precisione massimo. Determinare tale grado di precisione.

2) Si hanno due mazzi di carte: il mazzo A è formato da 6 carte di cui 3 rosse e tre nere, il mazzo B ha 7 carte di cui 3 rosse e 4 nere.
Si estrae una carta dal mazzo A: se la carta è rossa si estrae una seconda carta dallo stesso mazzo (senza reinserire la prima carta estratta) mentre se è nera si estrae una carta dal mazzo B.
Un giocatore vince 1 Euro se si hanno 2 carte nere, perde 1 Euro se si hanno 2 carte rosse, non perde e non vince se si ha una carta rossa ed una nera (indipendentemente dall’ordine di estrazione).
Il giocatore interrompe il gioco se ha 0 Euro o 3 Euro.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.
b) Classificare gli stati della catena di Markov.
c) Calcolare le probabilitá di assorbimento.
d) Calcolare i tempi medi di assorbimento.
e) Il gioco risulta equo?

3) Due variabili aleatorie X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} Kx^3y & 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

a) Determinare la costante K.
b) Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.
c) Le variabili X e Y sono indipendenti?
d) Calcolare $P(x^2 + y^2 - 2x < 0)$.

Soluzione

1) Si impone che la formula sia esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ ottenendo il sistema nonlineare

$$\begin{array}{lcl} a_0 + a_1 & = & 1/2 \\ a_0 x_0 + a_1 - a_1 x_0 & = & 1/3 \\ a_0 x_0^2 + a_1 - 2a_1 x_0 + a_1 x_0^2 & = & 1/4 \end{array} .$$

Sottraendo la seconda equazione dalla terza e tenendo conto della prima si ha l'equazione

$$\frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{12} = 0$$

da cui, per esempio,

$$x_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\,, \qquad 1 - x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\,.$$

Sostituendo, si ottiene

$$a_0 = \frac{3+\sqrt{3}}{12}\,, \qquad a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{12}\,.$$

La formula ottenuta non risulta esatta per $f(x) = x^3$ per cui il grado di precisione è 2.

2) Le probabilità di avere le combinazioni di due carte sono

$$P(RR) = 1/5\,, \quad P(NN) = 2/7\,, \quad P(RN + NR) = 18/35\,.$$

Indicando gli stati della catena con $E_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3$, la matrice di transizione risulta

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 18/35 & 2/7 & 0 \\ 0 & 1/5 & 18/35 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si hanno due stati assorbenti (quindi due classi chiuse) $C^{(1)} = \{E_0\}$ e $C^{(2)} = \{E_3\}$. Gli stati E_1, E_2 sono transitori.
Le probabilità di assorbimento nella classe $C^{(1)}$ si ottengono risolvendo il sistema lineare

$$\begin{array}{lcl} \lambda_1^{(1)} & = & \frac{18}{35}\lambda_1^{(1)} + \frac{2}{7}\lambda_2^{(1)} + \frac{1}{5} \\ \lambda_2^{(1)} & = & \frac{1}{5}\lambda_1^{(1)} + \frac{18}{35}\lambda_2^{(1)} \end{array}$$

la cui soluzione è

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{119}{219}\,, \quad \lambda_2^{(1)} = \frac{49}{219}\,.$$

Ovviamente si ha

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{100}{219}\,, \quad \lambda_2^{(2)} = \frac{170}{219}\,.$$

I tempi medi di assorbimento sono dati dalla soluzione del sistema lineare

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \tfrac{18}{35}\eta_1 + \tfrac{2}{7}\eta_2 + 1 \\ \eta_2 &= \tfrac{1}{5}\eta_1 + \tfrac{18}{35}\eta_2 + 1 \end{aligned}$$

che è

$$\eta_1 = \frac{315}{73}\,, \quad \eta_2 = \frac{280}{73}\,.$$

Il gioco non risulta equo poiché la variabile X che assume valori $-1, 0, 1$ con rispettive probabilità $1/5, 18/35, 2/7$ ha $E[X] = 3/35 \neq 0$.

3) La costante K si determina imponendo $\int\int_{R^2} f(x,y)dxdy = 1$. Si ottiene $K = 1/2$.
Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \frac{x^3}{4}\,, \qquad f_Y(y) = 2y\,.$$

Risultando $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ le due variabili sono indipendenti.
La probabilità richiesta si ottiene da

$$\begin{aligned} P(x^2 + y^2 - 2x < 0) &= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} x^3 y dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 \frac{2x - x^2}{2} dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^2 (2x^4 - x^5) dx \\ &= \frac{8}{15}\,. \end{aligned}$$