Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 19/09/07

1) Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & a & -a & a \\ -a & t & a & -a \\ a & -a & t & a \\ -a & a & -a & t \end{pmatrix}, \quad t, a \in R\,.$$

Posto $t = 0$, determinare i valori del parametro reale a per i quali la matrice risulta convergente.

2) Una catena di Markov ha la matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

a) La catena risulta riducibile?

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare la/e distribuzione/i limite.

d) Calcolare le probabilità di assorbimento.

e) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

3) Una variabile aleatoria X ha media $\mu = a$ e varianza $Var(X) = a^2$ ($a > 0$). Della variabile si ha un campione di taglia $n = 100$ con $\sum_{i=1}^{100} X_i = 50$.

Del parametro a determinare un intervallo di confidenza centrato di livello $\gamma = 0.9$.

Soluzione

1) Si considera la matrice

$$B = A - tI = \begin{pmatrix} 0 & a & -a & a \\ -a & 0 & a & -a \\ a & -a & 0 & a \\ -a & a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

la cui equazione caratteristica è $\mu^4 + 6a^2\mu^2 + a^4 = 0$. Gli autovalori della matrice B sono

$$\mu_{1,2} = \pm ia\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,, \quad \mu_{3,4} = \pm ia\sqrt{3-2\sqrt{2}}\,,$$

per cui gli autovalori della m atrice A sono

$$\lambda_{1,2} = t \pm ia\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,, \quad \lambda_{3,4} = t \pm ia\sqrt{3-2\sqrt{2}}\,.$$

Posto $t = 0$, la matrice A risulta convergente se i suoi autovalori sono di modulo minore di 1. Si ricava la condizione

$$|a| < \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\,.$$

2) Indichiamo con E_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, gli stati della catena.
La catena risulta riducibile. Si hanno due classi chiuse $C^{(1)} = \{E_2, E_3, E_4\}$, $C^{(2)} = \{E_5\}$ e gli stati transitori $\tau = \{E_1, E_6\}$.
Si hanno due distribuzioni limite

$$\pi^{(1)} = \frac{1}{7}(0, 2, 1, 4, 0, 0)\,, \quad \pi^{(2)} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)\,.$$

Poiché i due stati transitori sono collegati solo con lo stato assorbente costituente la classe chiusa $C^{(2)}$ si hanno le probabilità di assorbimento

$$\lambda_1^{(1)} = 0\,, \quad \lambda_6^{(1)} = 0\,, \quad \lambda_1^{(2)} = 1\,, \quad \lambda_6^{(2)} = 1\,.$$

I tempi medi di assorbimento sono

$$\eta_1 = \frac{5}{2}\,, \quad \eta_6 = 2\,.$$

3) Per il Teorema del Limite Centrale la variabile $S_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge in legge ad una variabile gaussiana standard.
Considerando $n = 100$ sufficientemente grande si determina l'intervallo centrato per il quale risulta $P(-K < S_{100} < K) = \gamma = 0.9$. Dalle tavole si ricava $K \simeq 1.645$.
Dai dati del problema si ha

$$\begin{aligned} P(-K < S_{100} < K) &= P\left(-K < \frac{50 - 100a}{10a} < K\right) \\ &= P(-10Ka + 100a < 50 < 10Ka + 100a) \end{aligned}$$

da cui

$$P\left(\frac{5}{10+K} < a < \frac{5}{10-K}\right) = 0.9\,.$$

Infine, sostituendo il valore di K, otteniamo

$$P(0.429\ldots < a < 0.598\ldots) = 0.9\,.$$