Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 17/09/08

1) Determinare intervalli di separazione dei valori reali del parametro α tali da rendere minimo il grado del polinomio di interpolazione relativo ai seguenti punti

$$\begin{array}{c|cccccc} x & 0 & -1 & 1 & \alpha & 2 & -2 \\ \hline y & 1 & -3 & 3 & 2 & 15 & -21 \end{array}.$$

Approssimare tali valori con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$.

2) Si hanno due urne A e B. L'urna A contiene 4 palline rosse, l'urna B contiene 4 palline bianche. Si estrae una pallina da ciascuna urna e si reinseriscono scambiando le urne. Si ripete questa procedura fino ad avere 4 palline bianche nell'urna A.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare la/e distribuzione/i limite.

d) Calcolare le probabilità di assorbimento.

e) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

3) Due variabili X e Y hanno la seguente densità congiunta

		Y		
		-1	1	2
X	0	1/25	2/25	1/25
	1	3/25	4/25	6/25
	3	1/25	1/25	6/25

.

a) Calcolare le densità marginali.

b) Calcolare $E[X]$, $E[Y]$, $Var(X)$ e $Var(Y)$.

c) Calcolare $Cov(X, Y)$ indicando se le due varabili risultano indipendenti.

Soluzione

1) Si costruisce il quadro delle differenze divise spostando all'ultimo posto il punto in cui risulta coinvolto il parametro α ottenendo

x	y	$DD1$	$DD2$	$DD3$
0	1			
-1	-3	4		
1	3	2	-1	
2	15	7	1	2
-2	-21	11	-7	2
α	2	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1-4\alpha}{\alpha(\alpha+1)}$	$\frac{\alpha^2-3\alpha+1}{\alpha(\alpha^2-1)}$

.

I valori di α cercati sono le soluzioni dell'equazione $\frac{\alpha^2-3\alpha+1}{\alpha(\alpha^2-1)} = 2$ con $\alpha \neq 0, -1, 1, -2, 2$. Svolgendo i conti si ottiene l'equazione

$$2\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

che ha una sola soluzione reale appartenente all'intervallo $]0.5, 1[$.
Ponendo $f(x) = 2\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1$, $f'(x) = 6\alpha^2 - 2\alpha + 1$ e $f''(x) = 12\alpha - 2$ si osserva che sull'intervallo trovato risulta $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ per cui il metodo di Newton converge scegliendo il punto iniziale $x_0 = 1$. Si ottiene infine $\alpha \in]0.73, 0.74[$.

2) Indichiamo con E_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, i cinque stati dove i indica quante palline bianche sono contenute nell'urna A. La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/16 & 6/16 & 9/16 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 9/16 & 6/16 & 1/16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La catena presenta la classe chiusa $C^{(1)} = \{E_4\}$ per cui lo stato E_4 è uno stato assorbente mentre $\tau = \{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ è l'insieme degli stati transitori.
Si ha una unica distribuzione limite $\pi = (0, 0, 0, 0, 1)$.
Le probabilità di assorbimento sono (ovviamente)

$$\lambda_0^{(1)} = \lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(1)} = 1\,.$$

I tempi medi di assorbimento sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 1 + \eta_1 \\ \eta_1 &= 1 + \tfrac{1}{16}\eta_0 + \tfrac{6}{16}\eta_1 + \tfrac{9}{16}\eta_2 \\ \eta_2 &= 1 + \tfrac{1}{4}\eta_1 + \tfrac{1}{2}\eta_2 + \tfrac{1}{4}\eta_3 \\ \eta_3 &= 1 + \tfrac{9}{16}\eta_2 + \tfrac{6}{16}\eta_3 \end{aligned}$$

data da

$$\eta_0 = \frac{700}{9}\,, \quad \eta_1 = \frac{691}{9}\,, \quad \eta_2 = \frac{674}{9}\,, \quad \eta_3 = 69\,.$$

3) Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \begin{cases} 4/25 & \text{se } x = 0 \\ 13/25 & \text{se } x = 1 \\ 8/25 & \text{se } x = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad , \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 5/25 & \text{se } y = -1 \\ 7/25 & \text{se } y = 1 \\ 13/25 & \text{se } y = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad .$$

Seguono i valori

$$E[X] = \frac{37}{25} \, , \; E[X^2] = \frac{85}{25} \, , \; E[Y] = \frac{28}{25} \, , \; E[Y^2] = \frac{64}{25} \, ,$$

da cui

$$Var(X) = \frac{756}{625} \, , \quad Var(Y) = \frac{816}{625} \, .$$

Considerando la v.a. $Z = XY$ questa ha densità di probabilità

$$f_Z(z) = \begin{cases} 4/25 & \text{se } z = 0 \\ 3/25 & \text{se } z = -1 \\ 4/25 & \text{se } z = 1 \\ 6/25 & \text{se } z = 2 \\ 1/25 & \text{se } z = -3 \\ 1/25 & \text{se } z = 3 \\ 6/25 & \text{se } z = 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad .$$

Essendo $E[XY] = E[Z] = \frac{49}{25}$ si ha $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{189}{625}$ per cui le due variabili sono dipendenti.