Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 16/09/09

1) Determinare i pesi a_1, a_2 ed il nodo x_1 della formula di quadratura

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\, dx = a_1 f(x_1) + a_2 f(1) + E_1(f)$$

in modo da ottenere il massimo grado di precisione. Indicare tale grado di precisione.

2) Si hanno tre urne A, B, C conteneti, rispettivamente, $5, 6, 3$ palline numerate progressivamente a partire da 1.
Ad ogni passo della catena si estraggono due palline (con rimpiazzo) da un'urna. Se le due palline sono entrambe con numeri pari si prosegue dall'urna A, se si hanno due numeri dispari si passa all'urna C altrimenti si procede con le estrazioni dall'urna B.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Posto $p^{(0)} = (1, 0, 0)$, calcolare $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$.

d) Posto $p^{(0)} = (0, 1, 0)$, calcolare $p^{(1000)}$.

3) Due variabili X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + Ky & 0 \le x \le 1\,,\ \ 0 \le y \le 2\,, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad , \quad K \in R\,.$$

a) Determinare la costante reale K.

b) Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

c) Determinare la densità condizionata $f_{Y|X}(y|x)$.

c) Calcolare $P\left(Y > X^3\right)$.

Soluzione

1) Si impone che la formula sia esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ ottenendo il sistema

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 2/3 \\ a_1 x_1 + a_2 &= 2/5 \\ a_1 x_1^2 + a_2 &= 2/7\,. \end{aligned}$$

Con la tecnica di sostituzione si trova la soluzione

$$a_1 = \frac{7}{15}\,, \quad a_2 = \frac{1}{5}\,, \quad x_1 = \frac{3}{7}\,.$$

Poiché la formula ottenuta non risulta esatta per $f(x) = x^3$, il grado di precisione è $m = 2$.

2) Gli stati della catena E_i sono 3 e sono dati dalle urne A, B e C. La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 4/25 & 12/25 & 9/25 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 \end{pmatrix}\,.$$

Non si hanno classi chiuse per cui tutti gli stati sono ricorrenti.
Da $p^{(0)} = (1,0,0)$ si ha $p^{(1)} = \frac{1}{25}(4,12,9)$ e $p^{(2)} = \frac{1}{625}(116,298,211)$.
Ponendo $p^{(0)} = (0,1,0)$, come per qualunque altra distribuzione di probabilità iniziale, $p^{(1000)}$ risulta circa la distribuzione invariante π. Tale distribuzione limite è

$$\pi = \frac{1}{134}(25,64,45)\,.$$

3) La costante K si determina imponendo $\int\int_{R^2} f(x,y)dxdy = 1$. Si ricava $K = 1/6$.
Le densità marginali sono

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{6}y\right) dy = 2x^2 + \frac{1}{3}\,, \\ f_Y(y) &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{6}y\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}y\,. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x^2 + 1/6y}{2x^2 + 1/3}\,.$$

Essendo $P(Y > X^3) = 1 - P(Y < X^3)$ e

$$P(Y < X^3) = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \left(x^2 + \frac{1}{6} y \right) dy = \frac{15}{84}\,,$$

si ha

$$P(Y > X^3) = 1 - \frac{15}{84} = \frac{23}{28}\,.$$