Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 3/02/2017

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 3/02/2017

1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{y}$$

in un punto $P_0 \in [1,2] \times [2,3]$.
Si suppone di commettere un errore algoritmico $|\delta_a| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$ e di introdurre i valori x e y con errori $|\delta_x| \leq \frac{1}{2}10^{-3}$ e $|\delta_y| \leq 10^{-3}$.
Quale è il massimo errore assoluto $|\delta_f|$?

2) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3i & -1 & 2i \\ 2 & 6+i3 & 1 \\ 2+i & -4 & 7+i \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2i \\ 3-i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Il metodo di Jacobi converge?

b) Il metodo di Gauss-Seidel converge?

3) Calcolare i punti fissi (reali) della funzione

$$\phi(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}.$$

4) È data la tabella di valori

x	0	1	-1	α	2
$f(x)$	1	1	3	0	3

$\alpha \in \mathbb{R}$.

Determinare i valori reali α che rendono minimo il grado del polinomio di interpolazione.

5) Per approssimare l'integrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_2(f) = a_0 f(-1) + a_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + a_2 f(1).$$

Calcolare i pesi a_0, a_1 e a_2 che individuano la formula con grado di precisione massimo. Indicare il gardo di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Risultando $A_x = A_y = 1/2$, si ha

$$|\delta_f| \leq |\delta_a| + A_x|\delta_x| + A_y|\delta_y| = \frac{1}{2}10^{-2} + \frac{1}{4}10^{-3} + \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{23}{4}10^{-3}.$$

2) Entrambi i metodi iterativi convergono perchè la matrice A è a predominanza diagonale debole e irriducibile.

3) I punti fissi della funzione si ottengono risolvendo l'equazione $x = \phi(x)$. Si hanno due punti fissi uno dei quali con molteplicià 2: $\alpha_{1,2} = 1$ e $\alpha_3 = -1$.

4) Dal quadro delle differenze divise, non considerando il punto che coinvolge il parametro α, si ricava che il polinomio di interpolazione è $P_4(x) = x^2 - x + 1$. In questo caso non esistono valori reali del parametro che rendano nullo il polinomio. Non esistono nemmeno valori reali α che rendono il polinomio di interpolazione di grado 3 per cui il polinomio risulterà di grado 4 per ogni valore reale del parametro.

5) Imponendo che la formula sia esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ si ottengono i pesi

$$a_0 = \frac{5}{9}, \qquad a_1 = \frac{16}{9}, \qquad a_2 = -\frac{1}{3}\,.$$

La formula ottenuta non risulta esatta per $f(x) = x^3$ per cui il grado di precisione è $m = 2$.