Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 22/02/2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 22/02/2014

1) Siano $x \in [1, 2]$ e $y \in [-2, -1]$ e si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{y}{x} .$$

Indicare come si deve eseguire l'operazione di divisione e con quale errore assoluto si devono introdurre x e y per avere $|\delta_f| \leq 10^{-2}$.

2) È data la funzione

$$\phi(x) = \frac{-x^3 + 2x + 2}{x} .$$

Determinare i punti fissi della funzione $\phi(x)$.
A quali di tali punti fissi è assicurata la convergenza del metodo iterativo $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$?

3) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-i & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix}$$

ha autovalori reali?

4) È dato il sistema lineare sovradeterminato $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Per quali valori reali α il sistema ha una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati?

5) Determinare il peso a_0 ed il nodo x_1 per i quali la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = a_0 f(-1) + \frac{4}{3} f(x_1) + E_1(f)$$

ha grado di precisione massimo.
Indicare il grado di precisione m ottenuto.

Soluzione

1) Il punto $P_0 = (x, y)$ appartiene all'insieme di indeterminazione $D = [1, 2] \times [-2, -1]$.
Risultano $A_x = \sup_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 2$ e $A_y = \sup_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 1$. Per ottenere la precisione richiesta basta quindi che risulti, per esempio,

$$|\delta_a| \leq \frac{1}{2}10^{-2}\,, \quad A_x|\delta_x| \leq \frac{1}{4}10^{-2}\,, \quad A_y|\delta_y| \leq \frac{1}{4}10^{-2}\,.$$

Ne segue che basta arrotondare la divisione alla seconda cifra decimale introducendo le approssimazioni di x e y com massimo errore assoluto minore di 10^{-3} (che equivale ad introdurli troncandone i valori alla terza cifra decimale).

2) Per ottenere i punti fissi basta risolvere l'equazione

$$x = \frac{-x^3 + 2x + 2}{x}\,.$$

Le soluzioni sono $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$ e $\alpha_3 = -\sqrt{2}$.
Risultando

$$\phi'(\alpha_1) = 0\,, \quad \phi'(\alpha_2) = -(2\sqrt{2} + 1)\ (< -1)\,, \quad \phi'(\alpha_1) = 2\sqrt{2} - 1\ (> 1)\,,$$

il metodo assicura la sua convergenza solo al punto fisso α_1.

3) All'unione dei cerchi di Gershgorin non appartengono valori reali per cui la matrice data ha solo autovalori complessi.

4) La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati risulta unica se la matrice A ha rango massimo e quindi uguale a 2.
L'unico valore α che rende la matrice A di rango uguale a 1 è $\alpha = 1$.

5) Imponendo che la formula data sia esatta per $f(x) = 1$ e $f(x) = x$ si ha $a_0 = \frac{2}{3}$ e $x_1 = \frac{1}{2}$.
Risultando $E_1(x^2) \neq 0$, il grado di precisione è $m = 1$.