Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 21/02/2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 21/02/2015

1) Si determini l'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2} \, .$$

2) Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \, .$$

3) È data l'equazione

$$e^{-x} + Kx^2 = 0 \, , \quad K \in \mathbb{R} \, .$$

Determinare i valori reali K per i quali l'equazione data ha radici di molteplicità maggiore di uno.

4) Il polinomio $P(x) = 2x^2 + x + 1$ è il polinomio di interpolazione di Hermite relativo ai dati

x	0	-1
$f(x)$	1	2
$f'(x)$	1	-3

?

5) Per approssimare l'integrale $I = \int_0^1 x f(x) dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_1(f) = \frac{1}{6} f(0) + \frac{1}{3} f(1) \, .$$

Determinare il grado di precisione m della formula data.
Nell'ipotesi che l'errore sia esprimibile come $E_1(f) = K f^{(s)}(\xi)$, determinare K e s.

Soluzione

1) Considerando l'algoritmo

$$r_1 = y^2 \,, \qquad r_2 = x/r_1 \,,$$

si ottiene l'espressione dell'errore relativo

$$\epsilon_f = \epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_x - 2\epsilon_y \,.$$

2) La matrice A è una matrice di Frobenius e la sua equazione caratteristica risulta essere $\lambda^n - 1 = 0$. Ne segue che gli autovalori di A sono le radici n-sime dell'unità

$$\lambda_j = \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

3) Posto $f(x) = e^{-x} + Kx^2$, basta imporre che siano contemporaneamente verificate le equazioni $f(x) = 0$ e $f'(x) = 0$.
Si ottiene chequesto risulta verificato se $x = -2$ e $K = -\frac{e^2}{4}$.

4) Il polinomio dato è il polinomio di interpolazione di Hermite relativo ai valori dati perché ha grado 2 (quindi non superiore a $2k + 1 = 3$) e si ha

$$P(0) = 0 \,, \quad P(-1) = 2 \,, \quad P'(0) = 1 \,, \quad P'(-1) = -3 \,.$$

5) La formula data ha grado di precisione $m = 1$ (risulta esatta per $f(x) = 1, x$ mentre si ha $E_1(x^2) = -\frac{1}{12}$). Ne segue che $s = 2$ e $K = -\frac{1}{24}$.