Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 09/01/2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica   09/01/2016

1) Si determini l'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}\,.$$

2) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Determinare i valori reali α per i quali risulta convergente la matrice $B = I + \alpha A$.

3) Dire quanti punti fissi ha la funzione

$$\phi(x) = 2e^x - x^2$$

indicando per ciascuno di essi un intervallo di separazione.

4) Data la tabella di valori

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & \alpha & -1 \\ \hline y & 0 & \alpha & 6 & 0 \end{array}\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

determinare i valori del parametro reale α che rendono minimo il grado del polinomio di interpolazione.

5) Per approssimare l'integrale $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_1(f) = a_0 f(-1/2) + a_1 f(2/3)\,.$$

Determinare i pesi a_0 e a_1 che danno la formula con grado di precisione massimo indicando il grado di precisione raggiunto.

Soluzione MODIFICARE

1) Considerando l'algoritmo

$$r_1 = x + y\ , \quad r_2 = x - y\ , \quad r_3 = \frac{r_1}{r_2}\ ,$$

si ottiene l'espressione dell'errore relativo

$$\epsilon_f = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \frac{2xy}{x^2 - y^2}\epsilon_x + \frac{2xy}{x^2 - y^2}\epsilon_y\ .$$

2) Gli autovalori della matrice $I + \alpha A$ sono $\lambda_1 = 1 + 3\alpha$ e $\lambda_2 = 1 - \alpha$. Non esistono valori reali del parametro α tali da rendere entrambi gli autovalori di modulo minore di 1.

3) La funzione $\phi(x)$ ha un solo punto fisso $\alpha \in]-2, -1[$.

4) Dal quadro delle differenze divise si ricava che il polinomio interpolante di grado minimo si ottiene per $\alpha = 2$ ed è $P_3(x) = x^2 + x$.

5) Imponendo che la formula sia esatta per $f(x) = 1$ e $f(x) = x$ si ottiene il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_0 & + & a_1 & = & 2 \\ -\frac{1}{2}a_0 & + & \frac{2}{3}a_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

da cui si ricava $a_0 = \frac{8}{7}$ e $a_1 = \frac{6}{7}$.
La formula ottenuta risulta esatta per $f(x) = x^2$ ma non per $f(x) = x^3$ per cui il grado di precisione è $m = 2$.