Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 30/01/2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 30/01/2016

1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x, y) = x \cdot y$$

in un punto $P_0 \in [0, 1] \times [1, 2]$.
Per avere un errore assoluto $|\delta_f| \leq 10^{-2}$, quali limitazioni devono soddisfare l'errore assoluto algoritmico $|\delta_a|$ e gli errori assoluti $|\delta_x|$ e $|\delta_y|$?

2) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è riducibile. Determinare una matrice di permutazione P che riduce la matrice data.

3) Le soluzioni distinte dell'equazione

$$x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3 = 0$$

sono $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ e $\alpha_3 = -3$.
Se si applicasse il metodo di Newton per approssimarle, quale ordine di convergenza otterremmo per ciascuna di esse?

4) Data la tabella di valori

x	0	1	-1	4
$f(x)$	1	2	1	0

determinare la retta di equazione $y = ax + b$ che approssima la funzione nel senso dei minimi quadrati.

5) Si vuole approssimare l'integrale $I(f) = \int_0^1 e^{-x} dx$ utilizzando la formula dei trapezi.
In quanti sottointervalli si deve dividere l'intervallo di integrazione per avere una approssimazione con un errore massimo $E \leq 10^{-2}$?

Soluzione

1) È noto che
$$|\delta_f| \le |\delta_a| + A_x|\delta_x| + A_y|\delta_y|.$$
La limitazione richiesta si ottiene se, per esempio, $|\delta_a| \le 10^{-2}/2$, $A_x|\delta_x| \le 10^{-2}/4$ e $A_y|\delta_y| \le 10^{-2}/4$. Avendo $A_x = 2$ e $A_y = 1$ si ottiene $|\delta_x| \le 10^{-2}/8$ e $|\delta_y| \le 10^{-2}/4$. Ciò significa arrotondare il risultato della moltiplicazione alla seconda cifra decimale e introdurre le approssimazioni di x e y troncandone i valori alla terza cifra decimale.

2) Una matrice che riduce A è $P = \{e^{(1)}|e^{(4)}|e^{(3)}|e^{(2)}\}$.

3) Le soluzioni α_1 e α_2 hanno molteplicità 2 per cui il metodo di Newton converge a tali valori con ordine $p = 1$ mentre converge ad α_3 con ordine $p \ge 2$ (con ulteriori conti si verifica $p = 2$).

4) Il sistema delle equazioni normali $A^TAc = A^Tb$ è dato da
$$\begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
La soluzione è $a = -3/14$, $b = 17/14$.

5) Da $f(x) = e^{-x}$ si ottiene $M_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f''| = 1$. Imponendo che l'errore della formula dei trapezi sia minore di $10^{-2}/2$ si ha
$$\frac{(b-a)^3 M_2}{12L^2} \le \frac{10^{-2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{12L^2} \le \frac{10^{-2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad L \ge 5\,.$$