Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica **9/06/2010**

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate ed i dati dello studente devono essere scritti a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica **9/06/2010**

1) Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

2) Dato l'insieme di numeri di macchina $\mathcal{F}(10, 2, -2, 2)$, i numeri $x_1 = 0.125$, $x_2 = 1.75$, $x_3 = 0.12$ e $x_4 = 0.01$, calcolare le rappresentazioni in $\mathcal{F}$ dei valori

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_3 + x_4, \quad x_3 \cdot x_4 \,.$$

3) Calcolare i punti fissi della funzione

$$\phi(x) = \frac{4 + 4x^3 - x^4}{4 + 3x} .$$

4) Determinare la retta di equazione $y = a + bx$ che approssima nel senso dei minimi quadrati la funzione $f(x)$ di cui sono noti i seguenti valori:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	2	1	-1

5) Determinare il grado di precisione algebrico della formula

$$J_4(f) = \frac{7}{45} f(-1) + \frac{32}{45} f(-1/2) + \frac{12}{45} f(0) + \frac{32}{45} f(1/2) + \frac{7}{45} f(1)$$

utilizzata per approssimare l'integrale $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Soluzione

1) Si considera la matrice $B = A - 2I$ che ha autovalori

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0\,, \quad \mu_4 = 4\,,$$

da cui si ottengono gli autovalori di A

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2\,, \quad \lambda_4 = 6\,.$$

2) Indicando con x^* la rappresentazione del generico numero reale x, si ha

$$x_1^* = 0.13 \times 10^0\,,\; x_2^* = 0.18 \times 10^1\,,\; x_3^* = 0.12 \times 10^0\,,\; x_4^* = 0.1 \times 10^{-1}\,,$$

$$(x_3 + x_4)^* = 0.13 \times 10^0\,, \quad (x_3 \cdot x_4)^* = 0.12 \times 10^{-2}\,.$$

3) I punti fissi sono le soluzioni dell'equazione

$$x = \frac{4 + 4x^3 - x^4}{4 + 3x}$$

e quindi i valori

$$\alpha_1 = 1\,, \quad \alpha_2 = -1\,, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 2\,.$$

4) Si risolve l'equazione $A^T A c = A^T b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix},$$

la cui soluzione è $c = \left(\frac{11}{10}, -\frac{7}{10}\right)^T$ per cui la retta cercata ha equazione

$$y = \frac{11}{10} - \frac{7}{10}x\,.$$

5) La formula proposta ha grado di precisone $m = 5$ risultando esatta per i polinomi $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$ ma non per x^6.