Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 3/07/2012

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 3/07/2012

1) Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{F}(10, 2, -2, 2)$. Dati i numeri $x_1 = 16.57$, $x_2 = 0.219$ e $x_3 = 1.1$, determinare le loro rappresentazioni nell'insieme $\mathcal{F}$.

2) Determinare il numero delle radici reali dell'equazione

$$e^{-x} - x^2 + 2x = 0\,,$$

indicandone opportuni intervalli di separazione.

3) È dato un sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

Per quali valori di α il metodo di Jacobi risulta convergente?

4) Una matrice A^2 di dimesione 3 ha i seguenti autovalori

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}i\,, \quad \lambda_2 = 4\,, \quad \lambda_3 = 16\,.$$

Determinare $\rho(A)$.
La matrice A è diagonalizzabile?

5) Risolvere, nel senso dei minimi quadrati, il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Soluzione

1) Le rappresentazioni richieste sono

$$\hat{x}_1 = 0.17 \times 10^2 \,, \quad \hat{x}_2 = 0.22 \times 10^0 \,, \quad \hat{x}_3 = 0.11 \times 10^1 \,.$$

2) Con una semplice separazione grafica si evidenzia che l'equazione data ha 3 radici reali separate dai seguenti intervalli:

$$\alpha_1 \in]-3,-2[\,, \quad \alpha_2 \in]-1,0[\,, \quad \alpha_3 \in]2,3[\,.$$

3) La matrice di iterazione di Jacobi è

$$H_J = -\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,.$$

L'equazione caratteristica, non considerando il fattore $-\alpha$, è $\lambda^4 - 1 = 0$. Ne segue che gli autovalori di H_J sono tutti di modulo $|\alpha|$ e quindi il metodo di Jacobi converge se e solo se $|\alpha| < 1$.

4) Gli autovalori della matrice A^2 sono i quadrati degli autovalori di A per cui $\rho(A) = 4$.
La matrice A ha ordine 3 con 3 autovalori due a due distinti per cui risulta diagonalizzabile.

5) Il *sistema delle equazioni normali* $A^T A x = A^T b$ ha matrice dei coefficienti e vettroe dei termini noti

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \,, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$

La soluzione cercata è quindi $(3/7, -1/7)^T$.