# Test di Calcolo Numerico

**Ingegneria Informatica 05/07/2014**

COGNOME ........................ NOME ........................

MATRICOLA... | | | | | | |

## Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

**N.B.** Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

# Test di Calcolo Numerico

**Ingegneria Informatica 05/07/2014**

**1)** Si determini l'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{z} \, .$$

**2)** Calcolare i punti fissi (reali) della funzione

$$\phi(x) = \frac{2 - x^2}{x^3} \, .$$

**3)** Gli autovalori di una matrice $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sono

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} i \, , \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3} \, , \quad \lambda_3 = i \, .$$

a) Calcolare il raggio spettrale della matrice $A$.

b) La matrice $A^4$ risulta convergente?

**4)** Calcolare i valori reali del parametro $K$ per i quali l'equazione

$$e^{-x} - Kx^2 = 0 \, , \quad K \in \mathbb{R} \, ,$$

ha soluzioni con molteplicità superiore a 1.

**5)** È data la tabella di valori

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 1 | 2 |

Determinare la retta di equazione $y = ax + b$ che approssima i valori dati nel senso dei minimi quadrati.

# Soluzione

**1)** Seguendo l'algoritmo $r_1 = x + y$ e $r_2 = r_1/z$, si ha l'errore relativo dato da

$$\epsilon_f = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{x}{x+y}\epsilon_x + \frac{y}{x+y}\epsilon_y - \epsilon_z \ .$$

**2)** Per ottenere i punti fissi basta risolvere l'equazione

$$x = \frac{2 - x^2}{x^3} \ .$$

Le soluzioni reali sono $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$.

**3)** Il raggio spettrale è $\rho(A) = 1$ e la matrice $A^4$ (come la matrice $A$) non risulta convergente avendo un autovalore di modulo uguale a 1.

**4)** Ponendo $f(x) = e^{-x} - Kx^2$, le soluzioni di molteplicità maggiore di 1 devono azzerare la funzione e la sua derivata prima.
Si deve quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} e^{-x} - Kx^2 & = & 0 \\ -e^{-x} - 2Kx & = & 0 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione reale $x = -2$ con $K = e^2/4$.

**5)** La soluzione nel senso dei minimi quadrati si ottiene ponendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \quad c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

e risolvendo il sistema "normale" $A^T A c = A^T g$.
Si ottiene la soluzione $c = (3/5, 1/10)^T$ per cui la retta cercata ha equazione

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{10} \ .$$