

---

# Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 24/07/2012

---



COGNOME ..... NOME .....

MATRICOLA... 

--	--	--	--	--	--

## RISPOSTE

1)

--

2)

--

3)

--

4)

--

5)

--

**N.B.** Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

---

# Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 24/07/2012

---



- 1) Determinare l'espressione dell'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2}.$$

- 2) La funzione

$$\phi(x) = 1 + \beta \log^2 x, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

ha il punto fisso  $\alpha = 1$ .

Utilizzando il processo iterativo  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  per approssimare  $\alpha$ , quale ordine di convergenza si ottiene al variare di  $\beta$ ?

- 3) Calcolare la fattorizzazione  $LR$  della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 4) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 + \beta & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

- a) Indicare per quali valori di  $\alpha, \beta, \gamma$  la matrice  $A$  risulta simmetrica.
- b) Indicare per quali valori di  $\alpha, \beta, \gamma$  la matrice  $A$  risulta a predominanza diagonale forte.
- c) Indicare per quali valori di  $\alpha, \beta, \gamma$  alla matrice  $A$  risulta associato un grafo fortemente connesso.

- 5) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = a f(x_0) + E_0(f).$$

Determinare il peso  $a$  ed il nodo  $x_0$  in modo da ottenere la formula con grado di precisione massimo. Inoltre, si indichi il grado di precisione ottenuto.

# SOLUZIONE

- 1) Per il calcolo di  $f(x, y)$  seguiamo l'algoritmo

$$r_1 = y^2, \quad r_2 = x/r_1.$$

L'errore relativo nel calcolo della funzione è

$$\epsilon_f = \epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_x - 2\epsilon_y.$$

- 2) Si calcolano le prime derivate della funzione  $\phi(x)$  che sono

$$\phi'(x) = \frac{2\beta \log x}{x}, \quad \phi''(x) = -\frac{2\beta \log x}{x^2} + \frac{2\beta}{x^2}.$$

Risultando  $\phi'(1) = 0$  e  $\phi''(1) = 2\beta \neq 0$ , l'ordine di convergenza del metodo è 2.

- 3) La fattorizzazione  $LR$  è data da

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 4) La matrice risulta simmetrica se  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  e  $\beta = 0$ .

La matrice ha predominanza diagonale forte se  $|\alpha| > 1$  e  $|\gamma| > 1 + |1 + \beta|$  (cioè  $|\gamma| > 2 + \beta$  se  $\beta \geq -1$  o  $|\gamma| > -\beta$  se  $\beta < -1$ ).

La matrice ha un grafo associato fortemente connesso (quindi risulta irriducibile) se  $\beta \neq -1$ .

- 5) Imponendo che la formula sia esatta per  $f(x) = 1, x$  si ottiene  $a = 1/3$  e  $x_0 = 3/4$ . La formula ha grado di precisione  $m = 1$  essendo  $E_0(x^2) \neq 0$ .