
Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 24/07/2012



COGNOME NOME

MATRICOLA...

--	--	--	--	--	--

RISPOSTE

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 24/07/2012



1) Determinare l'espressione dell'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2}.$$

2) La funzione

$$\phi(x) = 1 + \beta \log^2 x, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

ha il punto fisso $\alpha = 1$.

Utilizzando il processo iterativo $x_{n+1} = \phi(x_n)$ per approssimare α , quale ordine di convergenza si ottiene al variare di β ?

3) Calcolare la fattorizzazione LR della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 + \beta & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

- Indicare per quali valori di α, β, γ la matrice A risulta simmetrica.
- Indicare per quali valori di α, β, γ la matrice A risulta a predominanza diagonale forte.
- Indicare per quali valori di α, β, γ alla matrice A risulta associato un grafo fortemente connesso.

5) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = a f(x_0) + E_0(f).$$

Determinare il peso a ed il nodo x_0 in modo da ottenere la formula con grado di precisione massimo. Inoltre, si indichi il grado di precisione ottenuto.

SOLUZIONE

- 1)** Per il calcolo di $f(x, y)$ seguiamo l'algoritmo

$$r_1 = y^2, \quad r_2 = x/r_1.$$

L'errore relativo nel calcolo della funzione è

$$\epsilon_f = \epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_x - 2\epsilon_y.$$

- 2)** Si calcolano le prime derivate della funzione $\phi(x)$ che sono

$$\phi'(x) = \frac{2\beta \log x}{x}, \quad \phi''(x) = -\frac{2\beta \log x}{x^2} + \frac{2\beta}{x^2}.$$

Risultando $\phi'(1) = 0$ e $\phi''(1) = 2\beta \neq 0$, l'ordine di convergenza del metodo è 2.

- 3)** La fattorizzazione LR è data da

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 4)** La matrice risulta simmetrica se $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\beta = 0$.

La matrice ha predominanza diagonale forte se $|\alpha| > 1$ e $|\gamma| > 1 + |\beta|$ (cioè $|\gamma| > 2 + \beta$ se $\beta \geq -1$ o $|\gamma| > -\beta$ se $\beta < -1$).

La matrice ha un grafo associato fortemente connesso (quindi risulta irriducibile) se $\beta \neq -1$.

- 5)** Imponendo che la formula sia esatta per $f(x) = 1, x$ si ottiene $a = 1/3$ e $x_0 = 3/4$. La formula ha grado di precisione $m = 1$ essendo $E_0(x^2) \neq 0$.