Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 26/07/2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 26/07/2014

1) Siano $x \in [2,3]$, $y \in [1,2]$ e si consideri la funzione

$$f(x,y) = x\,y\,.$$

Determinare il massimo errore assoluto che si deve commettere nella introduzione dei dati e con quale massimo errore assoluto si deve eseguire l'operazione per avere un massimo errore assoluto finale $|\delta_f| \le 10^{-3}$.

2) L'equazione

$$\log(x) - \frac{1}{x} = 0$$

ha una unica soluzione $\alpha \in [1.5, 2]$. Dire se, scegliendo opportunamente il valore iniziale x_0, il metodo iterativo

$$x_{n+1} = e^{1/x_n}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

può risultare convergente con limite α.

3) Gli autovalori di una matrice $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sono

$$\lambda_1 = 2i\,, \quad \lambda_2 = 1\,, \quad \lambda_3 = 1 + i\,.$$

Determinare i valori $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice $B = \alpha A$ risulta convergente.

4) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix}\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Determinare i valori reali dei parametri α e β per i quali, rispettivamente,

a) A risulta simmetrica,

b) A risulta a predominanza diagonale forte,

c) A risulta a predominanza diagonale debole,

5) Calcolare i pesi a_0 e a_1 in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_1^2 x^4\, f(x)\, dx \simeq a_0 f(1) + a_1 f(2)$$

abbia grado di precisione (algebrico) massimo.

Soluzione

1) Il punto $P_0 = (x, y)$ appartiene all'insieme di indeterminazione $D = [2,3] \times [1,2]$.

Risultano $A_x = \sup_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 2$ e $A_y = \sup_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 3$. Per ottenere la precisione richiesta basta quindi che risulti, per esempio,

$$|\delta_a| \leq \frac{1}{2}10^{-3}\,, \quad A_x|\delta_x| \leq \frac{1}{4}10^{-3}\,, \quad A_y|\delta_y| \leq \frac{1}{4}10^{-3}\,.$$

Ne segue che basta arrotondare la divisione alla terza cifra decimale introducendo l'approssimazione di x com massimo errore assoluto minore di 10^{-4} (troncare alla quarta cifra decimale) e l'approssimazione di y con massimo errore assoluto minore di $\frac{1}{2}10^{-4}$ (arrotondare alla quarta cifra decimale).

2) Il metodo iterativo proposto ha la funzione di iterazione data da $\phi(x) = e^{1/x}$ con derivata $\phi'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}$. Sull'intervallo $[1.5, 2]$ si ha $|\phi'(x)| < \frac{1}{4}e^{2/3} < 1$ per cui il metodo, scegliendo opportunamente il valore iniziale, risulta convergente.

3) Deve risultare $|\alpha\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$. Ne segue che la matrice B risulta convergente se $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

4) La matrice A è simmetrica se $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.
Osservando la terza riga si deduce che non esistono valori dei parametri per i quali A sia a predominanza diagonale forte.
La predominanza diagonale debole si ha per ogni valore reale di β con la condizione $|1 + \alpha| \geq |\alpha|$ che risulta verificata per $\alpha \geq -1/2$.

5) Imponendo che la formula data sia esatta per $f(x) = 1$ e $f(x) = x$ si ha $a_0 = \frac{57}{30}$ e $a_1 = \frac{129}{30}$.
Risultando $E_1(x^2) \neq 0$, il grado di precisione è $m = 1$.