Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Elettronica, Informatica, Nucleare... 01/03/2011

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Elettronica, Informatica, Nucleare... 01/03/2011

1) La successione di polinomi

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 - 2x^2 + x + 1 \\ P_1(x) &= 3x^2 - 4x + 1 \\ P_2(x) &= -x + 7 \\ P_3(x) &= 8 \end{aligned}$$

è una successione di Sturm?

2) È data una matrice $A \in C^{n \times n}$.

a) $\|A^2\| < 1 \Longrightarrow A$ convergente?

b) $\|A^{-1}\| < 1 \Longrightarrow A$ convergente?

c) È possibile che risulti $\|A\| + \|A^{-1}\| < 1$?

3) Determinare la retta di equazione $y = c_0 + c_1 x$ che approssima nel senso dei minimi quadrati la seguente tabella di valori

x	1	0	−1	2
$f(x)$	0	1	2	−1

.

4) Determinare i punti fissi della funzione

$$h(x) = -1 + \frac{5 + 5x}{x^2} .$$

5) Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} .$$

Soluzione

1) La successione data non è una successione di Sturm poiché risulta $V(-\infty) - V(+\infty) = -1$.

2) La prima affermazione è vera perchè

$$\rho^2(A) = \rho(A^2) \leq \|A^2\| < 1 \Longrightarrow \rho(A) < 1\ .$$

La seconda è falsa poiché

$$\rho(A^{-1}) \leq \|A^{-1}\| < 1 \Longrightarrow \rho(A) > 1\ .$$

La terza relazione risulta falsa essendo

$$\|A\| + \|A^{-1}\| \geq \rho(A) + \rho(A^{-1}) > 1\ .$$

3) Si cerca la funzione $\phi(x) = c_0 + c_1 x$ dove c_0 e c_1 sono le componenti della soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\ .$$

Si ottiene $\phi(x) = 1 - x$.

4) I punti fissi sono le soluzioni dell'equazione $x = h(x)$ che sono $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \sqrt{5}$ e $\alpha_3 = -\sqrt{5}$.

5) La matrice A può essere scritta come

$$A = (\alpha + 1)I - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

per cui gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = \alpha - 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha + 1.$$