SCRITTO DI "CALCOLO NUMERICO" PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA E DELLE TELECOMUNICAZIONI FEBBRAIO 2000 - I^o Appello

====================================

1) È data la matrice $B \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$

$$B = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & -A \end{pmatrix}$$

con $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e I matrice identica di ordine n.

a) Calcolare la matrice $C = B^2$.

b) Calcolare la matrice B^{-1}.

c) Calcolare gli autovalori λ di B in funzione degli autovalori μ di A.

d) Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare gli autovalori di B.

2) È data la tabella di valori

x	0	1	-1	2	-2	3
$f(x)$	3	$2\lambda - 2$	8	$12\lambda - 7$	$13 - 4\lambda$	$36\lambda - 12$

, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Calcolare il polinomio di interpolazione relativo alla tabella data.

Determinare i valori reali di λ per i quali tale polinomio ammette zeri reali di molteplicità maggiore di uno. Indicare i valori di tali zeri.

1) Risulta

$$B^2 = \begin{pmatrix} A^2 - I & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A^2 - I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A^2 \end{pmatrix} - I_{2n} .$$

Se esistono le matrici A^{-1} e $S = (A^{-1} - A)^{-1}$ si ha

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}SA^{-1} & A^{-1}S \\ -SA^{-1} & S \end{pmatrix} .$$

Dal calcolo di B^2 si deduce che il quadrato degli autovalori di B è uguale al quadrato degli autovalori di A diminuito di 1 per cui

$$\lambda = \pm\sqrt{\mu^2 - 1} .$$

Nel caso particolare proposto, la matrice A ha autovalori $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 2$ per cui

$$\lambda_1 = i \, , \; \lambda_2 = -i \, , \; \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \, , \; \lambda_5 = \sqrt{3} \, , \; \lambda_6 = -\sqrt{3} \, .$$

2) Si costruisce il quadro delle differenze divise

x	$f(x)$	$DD1$	$DD2$	$DD3$
0	3			
1	$2\lambda - 2$	$2\lambda - 5$		
-1	8	-5	λ	
2	$12\lambda - 7$	$6\lambda - 5$	4λ	λ
-2	$13 - 4\lambda$	$2\lambda - 5$	0	λ
3	$36\lambda - 12$	$12\lambda - 5$	5λ	λ

da cui si ottiene $P(x) = \lambda x^3 + \lambda x^2 - 5x + 3$.

Gli zeri α del polinomio $P(x)$ sono di molteplicità maggiore di uno se $P(\alpha) = 0$ e $P'(\alpha) = 0$. Si ottinene il sistema

$$\begin{array}{l} \lambda x^3 + \lambda x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 3\lambda x^2 + 2\lambda x - 5 = 0 \end{array} \quad ;$$

dalla seconda equazione, se $x \neq 0, -2/3$ (non sono soluzioni del sistema), si ricava $\lambda = 5/(3x^2 + 2x)$ che sostituito nella prima equazione porta a risolvere

$$x(5x^2 - 2x - 3) = 0 .$$

Escludendo $x = 0$, si ha $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -3/5$.

Da α_1 si ottiene $\lambda_1 = 1$, da α_2 si ha $\lambda_2 = -125/3$.