SCRITTO DI "CALCOLO NUMERICO"
PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA E DELLE TELECOMUNICAZIONI
FEBBRAIO 2000 - II^o Appello

====================================

1) Studiare l'equazione

$$e^{-x^2} - Kx^2 + Kx = 0\,, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Posto $K = 2$, approssimare le radici reali dell'equazione con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$.

2) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & u^T \\ u & \gamma I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}\,,$$

con $u = (1, 1, \ldots, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma \in \mathbb{R}$.

Determinare i valori di γ per i quali il procedimento di eliminazione di Gauss (senza pivoting) termina e quelli per i quali la matrice A è definita positiva.

Posto $\gamma = 2$, determinare $\rho(H_J)$ e $\rho(H_{GS})$.

1) Si esegue la separazione grafica $\begin{cases} y = e^{-x^2} \\ y = Kx^2 - Kx \end{cases}$

Risulta evidente il seguente schema:

$K > 0$ 2 soluzioni reali distinte;

$K = 0$ nessuna soluzione reale;

$\hat{K} < K < 0$ nessuna soluzione reale;

$K = \hat{K}$ 2 soluzioni reali coincidenti;

$K < \hat{K}$ 2 soluzioni reali distinte.

Per determinare $\hat{K}$ si risolve il sistema

$$\begin{cases} e^{-x^2} - K(x^2 - x) = 0 \\ -2xe^{-x^2} - 2Kx + K = 0 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione si ottiene $K = \frac{e^{-x^2}}{x^2-x}$, $x \neq 0, 1$ (i due valori non sono soluzione), che sostituita nella seconda porta all'equazione

$$\frac{-2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = 0 \implies 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0 .$$

Si ha una sola soluzione reale separata dall'intervallo $[0, 1]$. Il metodo di Newton è convergente scegliendo come punto iniziale $x_0 = 1$ e risulta $\hat{x} = 0.647798\ldots$ da cui $\hat{K} = -2.8808474\ldots$.

Nel caso particolare $K = 2$ si hanno due soluzioni reali (approssimabili con Newton)

$$\alpha_1 \in [-0.34, -0.33] \quad \alpha_2 \in [1.12, 1.13] .$$

2) I minori principali di testa della matrice A sono tutti dello stesso tipo: infatti il minore di ordine k è la matrice A di ordine k per cui basta calcolare il determinante di A.
Operando la fattorizzazione LR di A_k (di ordine k, $k = 1, 2, \ldots, n$) si ottengono le matrici

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ u & I \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} 1 & u^T \\ \mathbf{O} & \gamma I - uu^T \end{pmatrix} .$$

Si ricava $\det(A_{k+1}) = \det(\gamma I - uu^T) = \gamma^{k-1}(\gamma - k)$ per cui i minori principali di testa sono tutti diversi da zero se $\gamma \neq 0, 1, 2, \ldots, n$.

A risulta definita positiva se i minori principali di testa sono positivi; questo si verifica se $\gamma > n$.
Le matrici di iterazione di Jacobi e di Gauss-Seidel sono

$$H_J = \begin{pmatrix} 0 & -u^T \\ -u/2 & \mathbf{O} \end{pmatrix} \qquad H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -u^T \\ \mathbf{O} & uu^T/2 \end{pmatrix} .$$

Si deducono $\rho(H_J) = \sqrt{n/2}$ e $\rho(H_{GS}) = n/2$.