CALCOLO NUMERICO PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO[1] PER INGEGNERIA INFORMATICA
FEBBRAIO 2001 - II^o Appello

==============================

1) Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con a parametro reale.

a) Fattorizzare la matrice A nella forma LR indicando per quali valori reali di a non esiste tale fattorizzazione.

b) Posto $a = 1$, calcolare la matrice $P = N - A$ e dire, giustificando la risposta, se la matrice $H = N^{-1}P$ risulta convergente.

2) Data la tabella di valori

x	-2	0	-1	2	α
$f(x)$	-13	5	3α	15α	5

, $\alpha \in \mathbb{R}$,

determinare per quali α il polinomio di interpolazione risulta di grado minimo.

[1] Gli studenti di questo corso devono risolvere anche i quesiti posti sul retro del foglio

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO
PER INGEGNERIA INFORMATICA
FEBBRAIO 2001 - II^o Appello
==================================

1) Sia X una variabile aleatoria con legge normale $\mathcal{N}(\mu, 4)$. Determinare il numero reale $b > 0$ per cui $P(\mid X - \mu \mid \leq b) = 0.95$.

2) Siano X e Y due variabili aleatorie con densità $f_X(x) = xe^{-x}$, $x \geq 0$, e $f_Y(y) = 3e^{-3y}$, $y \geq 0$.

a) Calcolare i valor medi $E[X]$ e $E[Y]$.

b) Calcolare $Var(X)$ e $Var(Y)$.

c) Calcolare $E[X+Y]$ e $Var(X+Y)$.

d) Calcolare la densità della variabile $Z = X + Y$.

1) La fattorizzazione della matrice A esiste se $a \neq 1$ ed è

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1+a}{1-a} & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 3+a \end{pmatrix}.$$

Posto $a = 1$, essendo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; N^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

si ha

$$H = N^{-1}P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica di H è

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2} = 0$$

che ha soluzioni $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$.
I tre autovalori non sono tutti minori di uno in modulo e quindi H non è convergente.

2) Si costruisce il quadro delle differenze divise

x	$f(x)$	$DD1$	$DD2$	$DD3$
-2	-13			
0	5	9		
-1	3α	$3\alpha + 13$	$-3\alpha - 4$	
2	15α	$\frac{15\alpha+13}{4}$	$\frac{15\alpha-23}{8}$	$\frac{13\alpha+3}{8}$
α	5	$\frac{18}{\alpha+2}$	$-\frac{9}{\alpha+2}$	$\frac{3\alpha^2+10\alpha-1}{(\alpha+2)(\alpha+1)}$

da cui si ricava che il polinomio di interpolazione risulta di grado minimo per i valori di α che rendono uguali le ultime due differenze divise. Si ha così l'equazione

$$13\alpha^3 + 18\alpha^2 - 45\alpha + 14 = 0$$

le cui radici sono

$$\alpha_1 = 1\,, \quad \alpha_{2,3} = \frac{-31 \pm \sqrt{1689}}{26}.$$

Per $\alpha = 1$ il polinomio di interpolazione è $P(x) = 2x^3 - x^2 - x + 5$.

1) Sia $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Si ha $X = 4Y + \mu$ per cui

$$\begin{aligned} P(\mid X - \mu \mid \leq b) &= P(-b \leq 2Y + \mu - \mu \leq b) \\ &= P\left(-\frac{b}{2} \leq Y \leq \frac{b}{2}\right) \\ &= 2\phi(b/2) - 1 \, . \end{aligned}$$

Si deve quindi trovare il valore di b per il quale $\phi(b/2) = 0.975$ che, dalle tavole, è $b/2 = 1.96$ per cui $b = 3.92$.

2) I valori medi richiesti sono

$$E[X] = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2 \, , \quad E[Y] = \int_0^\infty 3y e^{-3y} dy = \frac{1}{3} \, .$$

Da $E[X^2] = 6$ e $E[Y^2] = 2/9$ discendono le varianze

$$Var(X) = 2 \, , \quad Var(Y) = \frac{1}{9} \, .$$

Per la v.a $X + Y$, essendo X e Y indipendenti, si ha

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = \frac{7}{3} \, , \; Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{19}{9} \, .$$

La densità di $Z = X + Y$ si determina calcolando

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^\infty f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ &= \int_0^\infty x e^{-x} \cdot 3e^{-3(z-x)} dx \\ &= 3e^{-z} \int_0^z x e^{2x-2z} dx \\ &= \frac{3}{4} e^{-z} (2z - 1 + e^{-z}) \, . \end{aligned}$$