CALCOLO NUMERICO PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO[1] PER INGEGNERIA INFORMATICA
SETTEMBRE 2000 - I^o Appello
==================================

1) È dato il sistema lineare sovradeterminato $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in I\!R.$$

- **a)** Determinare per quali valori reali di α e di β il sistema ha più di una soluzione nel senso dei minimi quadrati.
- **b)** Per i valori trovati al punto a) calcolare le soluzioni del sistema.
- **c)** Posto $\alpha = \beta = 1$, calcolare gli autovalori della matrice $B = A^T A$.

2) Determinare i pesi a, b, c ed il nodo x_1 della formula di quadratura

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)dx &= a\left(f(x_1) + f(-x_1)\right) + bf'(0) \\ &\quad + c\left(f''\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + f''\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right) + E(f) \end{aligned}$$

in modo che abbia grado di precisione i più elevato possibile. Determinare il grado di precisione raggiunto.

[1] Gli studenti di questo corso devono risolvere anche i quesiti posti sul retro del foglio

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO
PER INGEGNERIA INFORMATICA
SETTEMBRE 2000 - I^o Appello
==================================

1) Due amici A e B fissano un appuntamento con le seguenti modalità : B, che non abita nella città di A, decide, lanciando una moneta, se partire (evento P) o non partire (evento Q); se decide di partire sceglierà il treno, tra i sei treni possibili, gettando un dado.

a) Qual è la probabilità che B non arrivi?

b) Qual è la probabilità che B arrivi con l'i-esimo treno ($i = 1, \ldots, 6$)?

b) Se B non è arrivato con i primi cinque treni, qual è la probabilità che arrivi con il sesto?

(La moneta e il dado sono equilibrati e i due lanci indipendenti)

2) Si consideri la v.a. X di funzione di ripartizione

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{54}t^2 + \frac{1}{9}t & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{480}t^3 + \frac{71}{480}t & 3 \leq t \leq 5 \\ 1 & t \geq 5 \end{cases}.$$

a) Quali sono i possibili valori della v.a. X?

b) Cacolare la densità di X.

c) Calcolare $E[X]$.

d) Calcolare $Var(X)$.

1) Il sistema ha più di una soluzione nel senso dei minimi quadrati se la matrice A non ha rango massimo e quindi se i minori di ordine 3 sono tutti nulli. I 4 minori di ordine 3 risultano uguali a

$$\alpha(\alpha-1)\,, \quad \beta(1-\alpha)\,, \quad \beta\alpha\,, \quad \beta\alpha^2\,.$$

Si hanno quindi più soluzioni se

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

Per $\alpha = 1$, $\beta = 0$ si ottiene $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ per cui la soluzione del sistema sovradeterminato risulta $x = (t, -1-t, 1)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

Per $\alpha = \beta = 0$ si ottiene $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui la soluzione del sistema sovradeterminato risulta $x = (t, 2, -1-t)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

Posto $\alpha = \beta = 1$, si ha $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 9\lambda - 2 = 0$. Gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{41}}{2}\,, \quad \lambda_3 = \frac{7+\sqrt{41}}{2}\,.$$

2) Si impone che la formula sia esatta per $f(x) = 1, x, x^2, x^4$ (per $f(x) = x^3, x^5$ la formula risulta esatta se è esatta per $f(x) = x$) ottenendo il sistema

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ x_1^2 + 2c & = & 1/3 \\ x_1^4 + 6/5c & = & 1/5 \end{cases}$$

che ha due soluzioni

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & 1/6 \\ x_1 & = & 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & -2/15 \\ x_1 & = & \sqrt{3/5} \end{cases}.$$

Le due soluzioni definiscono formule con grado di precisione 5.

1) La probabilità che B non arrivi è , banalmente, 1/2.

La probabilità che B arrivi con l'i-esimo treno è 1/12.

La probabilità che B arrivi col sesto treno è condizionata sapendo che non è arrivato con uno dei primi cinque treni. Ne segue che, indicato con T_6 l'evento "B *arriva col sesto treno*", si deve calcolare

$$P(T_6 \mid T_6 \cup Q) = \frac{P(T_6)}{P(T_6 \cup Q)} = \frac{1/12}{7/12} = \frac{1}{7}\,.$$

2) I possibili valori della v.a. X sono quelli appartenenti all'intervallo $[0,5]$.

La v.a. X ha densità che risulta

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{27}t + \frac{1}{9} & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{160}t^2 + \frac{71}{480} & 3 \leq t \leq 5 \\ 0 & t \geq 5 \end{cases}\,.$$

La media $E[X]$ è

$$E[X] = \int_0^3 t(\frac{1}{27}t + \frac{1}{9})dt + \int_3^5 t(\frac{1}{160}t^2 + \frac{71}{480})dt = \frac{43}{15}\,.$$

La varianza $Var(X)$ risulta

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{4583}{450} - \frac{1849}{225} = \frac{59}{30}\,.$$