CALCOLO NUMERICO PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO[1] PER INGEGNERIA INFORMATICA
SETTEMBRE 2000 - II^o Appello

==================================

1) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in I\!R,$$

e si consideri lo schema iterativo $x_{k+1} = Ax_k$, $k = 0, 1, \ldots$.

Determinare i seguenti insiemi

a) $\mathcal{C} = \{\alpha \in I\!R \mid \; A \text{ è convergente}\}$

b) $\mathcal{D} = \{\alpha \in I\!R \mid \mid \lambda_1 \mid \geq 1 \text{ e } \mid \lambda_2 \mid \geq 1\}$

c) $\chi = \left\{x_0 \in I\!R^2 \mid \text{ posto } \alpha = -3/4 \text{ si ha } \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}$

2) Data la funzione

$$\phi(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \leq -\frac{1}{2} \\ 2x & \text{se} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{3}{2} & \text{se} \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

si consideri lo schema iterativo $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$.

a) Determinare i punti fissi della funzione $\phi(x)$.

b) Dire, giustificando la risposta, se lo schema iterativo proposto è idoneo alla approssimazione dei punti fissi trovati.

c) Individuare il comportamento del processo iterativo se si sceglie un punto iniziale $x_0 \leq 0$.

[1] Gli studenti di questo corso devono risolvere anche i quesiti posti sul retro del foglio

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO
PER INGEGNERIA INFORMATICA
SETTEMBRE 2000 - II^o Appello
==================================

1) Un'urna contiene cinque palline, numerate da 1 a 5. Si estraggono due palline in successione, senza rimettere nell'urna la prima pallina estratta, considerando alla pari, in ciascuna estrazione, tutte le palline presenti nell'urna.

a) Calcolare la probabilità che *i due numeri sono pari.*

b) Calcolare la probabilità che *i due numeri sono dispari.*

c) Calcolare la probabilità che *il secondo numero è pari.*

2) Si consideri la v.a. X con densità ($K \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Kx^2e^{-x} & 0 \le t \end{cases} .$$

a) Determinare K in modo che $f(x)$ sia una densità .

b) Calcolare $E[X]$.

c) Calcolare $Var(X)$.

d) Calcolare $P(3X < 2)$.

1) L'equazione caratteristica della matrice A è $\lambda^2 - \lambda + \alpha = 0$ le cui radici sono

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha}}{2}\,, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha}}{2}\,.$$

Gli autovalori sono reali se $\alpha \leq 1/4$ e complessi coniugati se $\alpha > 1/4$. Gli autovalori sono di modulo minore di 1 nel caso reale se $0 < \alpha \leq 1/4$, nel caso complesso se $1/4 < \alpha < 1$. Risulta quindi $\mathcal{C} = \{\alpha \mid 0 < \alpha < 1\}$.

I due autovalori sono di modulo maggiore od uguale a 1 se $\alpha \leq -2$ (caso reale) o $\alpha > 1$ (caso complesso) per cui $\mathcal{D} = \{\alpha \mid \alpha \leq -2 \text{ o } \alpha > 1\}$.

Per $\alpha = -3/4$ la matrice non è convergente ed i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_2 = -1/2$. La successione converge al vettore nullo se e solo se si sceglie come x_0 un autovettore associato all'autovalore λ_2 e cioè $x_0 = (t, 2t)^T$, $t \neq 0$.

2) I punti fissi dello schema iterativo proposto sono $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 3/4$.

Poiché

$$\phi'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -\frac{1}{2} \\ 2 & \text{se} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

la successione x_k può convergere, scegliendo opportunamente x_0, solo ad α_1.

Con una semplice analisi grafica si ricava che la successione converge ad α_1 se $x_0 < 0$ mentre converge ad α_2 (risulta costante) se $x_0 = 0$.

1) La probabilità che la prima pallina sia pari è $2/5$ mentre per la seconda è $1/4$ per cui il primo evento si verifica con probabilità $1/10$.

Analogamente la probabilità che le due palline siano dispari è $3/5 \cdot 2/4 = 3/10$.

La probabilità che il secondo numero sia pari risulta

$$\frac{3}{5}\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{2}{5}\,.$$

2) Poiché $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$ si deve avere $K = 1/2$.

Si ottiene banalmente $E[X] = 3$, $E[X^2] = 12$ e $Var(X) = 3$.

Poiché $P(3X < 2) = P(X < 2/3)$ risulta

$$\begin{aligned} P(3X < 2) &= \int_0^{2/3} \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{9}e^{-2/3} - \frac{4}{3}e^{-2/3} - 2e^{-2/3} + 2\right] \\ &= 1 - \frac{17}{9}e^{-2/3} \simeq 0.030212... \end{aligned}$$