

METODI NUMERICI PER L'INGEGNERIA

INGEGNERIA CHIMICA

GENNAIO 2001 - II^o Appello

=====

- 1) Determinare i coefficienti $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ in modo tale che il metodo a 2 passi

$$y_{n+2} - y_{n+1} = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

abbia ordine massimo indicando l'ordine raggiunto.

Calcolare il polinomio di stabilità del metodo.

Per $q = h\lambda = -2$ il metodo risulta assolutamente stabile? Per $q = -6$?

- 2) È data la tabella

x	0	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
$f(x)$	0	$\frac{8}{9}\pi^2$	$\frac{8}{9}\pi^2$

- a) Calcolare la trasformata discreta di Fourier.

- b) Calcolare il polinomio trigonometrico di grado 3 che interpola la tabella data.

- 1) Imponendo che risultino nulle le costanti c_1, c_2, c_3 ($c_0 = 0$ per costruzione del metodo) si ha il sistema lineare

$$\begin{array}{rccccccc} \beta_0 & + & \beta_1 & + & \beta_2 & = & 1 \\ & & 2\beta_1 & + & 4\beta_2 & = & 3 \\ & & 3\beta_1 & + & 12\beta_2 & = & 7 \end{array}$$

la cui soluzione è $\beta_0 = -\frac{1}{12}$, $\beta_1 = \frac{2}{3}$, $\beta_2 = \frac{5}{12}$. Risultando $c_4 = -\frac{1}{24}$ l'ordine del metodo è 3.

Il polinomio di stabilità è

$$\pi(q, \mu) = \left(1 - \frac{5}{12}q\right) \mu^2 - \left(1 + \frac{2}{3}q\right) \mu + \frac{1}{12}q.$$

Per $q = -2$ l'equazione $\pi(q, \mu) = 0$ ha radici $\mu_1 = \frac{-1+\sqrt{12}}{11}$ e $\mu_2 = \frac{-1-\sqrt{12}}{11}$. Entrambe hanno modulo minore di 1 per cui $-2 \in S_A$.

Per $q = -6$ si ha $\mu_1 = -1$ e $\mu_2 = \frac{1}{7}$ per cui $-6 \notin S_A$.

- 2) La matrice di Fourier in questo caso è

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

per cui la trasformata di Fourier $z = \frac{1}{3}V^H y$, $y = (0, 8\pi^2/9, 8\pi^2/9)^T$, risulta

$$z = \begin{pmatrix} \frac{16}{27}\pi^2 \\ -\frac{8}{27}\pi^2 \\ -\frac{8}{27}\pi^2 \end{pmatrix}.$$

I polinomio trigonometrico di interpolazione è

$$P(x) = \frac{16}{27}\pi^2 - \frac{16}{27}\pi^2 \cos(x) = \frac{16}{27}\pi^2(1 - \cos(x)).$$