

METODI NUMERICI PER L'INGEGNERIA
INGEGNERIA CHIMICA
FEBBRAIO 2001

=====

1) È dato il metodo

$$\begin{aligned}y_{n+1/3} &= y_n + \frac{1}{3}h f_n \\y_{n+5/6} &= y_n - \frac{5}{12}h f_n + \frac{5}{4}h f_{n+1/3} \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{10}h(f_n + 5f_{n+1/3} + 4f_{n+5/6})\end{aligned}$$

- a) Verificare che il metodo proposto è un metodo di Runge-Kutta (si ponga $k_1 = f_n$, $k_2 = f_{n+1/3}$ e $k_3 = f_{n+5/6}$).
- b) Calcolare la funzione di stabilità del metodo.
- c) Determinare l'ordine del metodo.

2) Risolvere l'equazione alle differenze

$$y_{n+3} + 3y_{n+2} - 4y_n = 7$$

con le condizioni iniziali

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{34}{9}, \quad y_2 = -\frac{49}{9}.$$

3) Determinare l'espressione dell'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{zy}$$

discutendo la stabilità dell'algoritmo seguito.

1) Il metodo è di Runge-Kutta con tavola di Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 5/6 & -5/12 & 5/4 & 0 \\ \hline & 1/10 & 1/2 & 2/5 \end{array} .$$

Risulta

$$\begin{aligned} R(q) &= \det(I - qA + qub^T) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{10}q & \frac{1}{2}q & \frac{2}{5}q \\ -\frac{7}{30}q & 1 + \frac{1}{2}q & \frac{2}{5}q \\ \frac{31}{60}q & -\frac{3}{4}q & 1 + \frac{2}{5}q \end{pmatrix} \\ &= 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3. \end{aligned}$$

L'ordine del metodo è 3 coincidendo la sua funzione di stabilità con lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale fino al termine q^3 .

2) L'equazione caratteristica è

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

che ha radici $\mu_1 = 1, \mu_2 = \mu_3 = -2$.

Per la soluzione particolare dell'equazione completa si cerca una soluzione del tipo $y^* = An$ (1 è radice caratteristica di molteplicità 1); sostituendo si ottiene $y^* = \frac{7}{9}n$.

L'integrale generale dell'equazione alle differenze risulta

$$y_n = c_1 + c_2(-2)^n + c_3n(-2)^n + \frac{7}{9}n.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 & = & 1 \\ c_1 & - & 2c_2 & - & 2c_3 & = & 3 \\ c_1 & + & 4c_2 & + & 8c_3 & = & -7 \end{array}$$

la cui soluzione è $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1$. Il problema di valori iniziali ha quindi soluzione

$$y_n = 1 - n(-2)^n + \frac{7}{9}n.$$

3) Si segue l'algoritmo

$$r_1 = x + y, \quad r_2 = zy, \quad r_3 = r_1/r_2.$$

Costruendo il grafo relativo si ottiene

$$\epsilon_f = \epsilon_{r_3} = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \frac{x}{x+y}\epsilon_x - \frac{x}{x+y}\epsilon_y - \epsilon_z.$$

L'algoritmo è stabile.