METODI NUMERICI PER L'INGEGNERIA

INGEGNERIA CHIMICA

SETTEMBRE 2001(I^o APPELLO).

=================================

1) È data la tavola di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 7/12 & 1/3 & 1/4 \\ \hline & 1/3 & 2/3 \end{array} .$$

a) Determinare la funzione di stabilità del metodo proposto.

b) Determinare l'intervallo reale di assoluta stabilità.

c) Determinare l'ordine di convergenza del metodo proposto.

2) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad a \in \mathbb{R} , \mid a \mid > 1 .$$

a) Calcolare il numero di condizione della matrice A in norma infinito.

b) Determinare l'estremo inferiore del numero di condizione in norma infinito al variare di a.

1) La funzione di stabilità si determina dalle matrici $I - qA$ e $I - qA + qub^T$ che sono

$$I - qA = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}q & 0 \\ -\frac{1}{3}q & 1 - \frac{1}{4}q \end{pmatrix}, \; I - qA + qub^T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{6}q & \frac{2}{3}q \\ 0 & 1 + \frac{5}{12}q \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$R(q) = \frac{\det(I - qA + qub^T)}{\det(I - qA)} = \frac{-\frac{5}{72}q^2 + \frac{1}{4}q + 1}{\frac{1}{8}q^2 - \frac{3}{4}q + 1} = \frac{-5q^2 + 18q + 72}{9q^2 - 54q + 72}.$$

L'intervallo reale di stabilità si calcola risolvendo la disequazione $\mid R(q) \mid < 1$ che equivale a $-1 < R(q) < 1$. Risulta che il metodo è assolutamente stabile se $q < 0$ o $q > \frac{36}{7}$. Il metodo risulta almeno A_0-stabile.
Calcolando alcune derivate successive di $R(q)$ e costruendo lo sviluppo di Taylor con punto iniziale $x_0 = 0$ si ottiene

$$R(q) = 1 + q + \frac{5}{9}q^2 + O(q^3).$$

Lo sviluppo di Taylor coincide con quello dell'esponenziale solo per i primi due termini per cui il metodo ha ordine 1.

2) La matrice A^{-1} esiste se $a \neq 1$ e risulta

$$A^{-1} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} 0 & 1-a & a-1 \\ -1 & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\|A\|_\infty = 2 + \mid a \mid,$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\mid a-1 \mid} \max\{2 \mid a-1 \mid, 2 + \mid a-1 \mid\} = \max\left\{2, 1 + \frac{2}{\mid a-1 \mid}\right\}.$$

Si hanno le seguenti possibilità:

$a < -1$ $\mu_\infty(A) = 4 - 2a$ (estremo inferiore 6),

$1 < a \leq 3$ $\mu_\infty(A) = (2+a)(1 + 2/(a-1)) = 2 + a + (4+2a)/(a-1)$ (valore minimo 10 per $a = 3$),

$3 < a$ $\mu_\infty(A) = 4 + 2a$ (estremo inferiore 10).

Si deduce che l'estremo inferiore dei valori assunti da $\mu_\infty(A)$ è 6.