Compito di "Calcolo Numerico"
D.U. teledidattico Piombino.
7 Luglio 1999.

==

1. È data l'equazione
$$e^{x^2} - 2\cos x = 0 \ .$$
Determinare quante sono le radici reali e per ciascuna di esse indicare un intervallo di separazione.
Approssimare la radice reale α più grande con il metodo di Newton determinando un valore x' tale che $\mid x' - \alpha \mid \leq 10^{-2}$.

2. Sono dati la matrice A ed il vettore b
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \ , \quad b = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} \ .$$
a) Calcolare la matrice A^{-1}.
b) Risolvere il sistema $Ax = b$.
c) Studiare il metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema $Ax = b$.
d) Studiare il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema $Ax = b$.

3. Determinare a, b, c in modo che la formula di quadratura
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(-1/3) + cf(2/3) + E(f)$$
abbia grado di precisione massimo. Determinare tale grado di precisione.

1. L'equazione ha due radici reali uguali ma di segno opposto. La radice positiva α appartiene all'intervallo $[0, 1]$.
   Il metodo di Newton converge (f' e f'' positive) e $\alpha \in [0.67, 0.68]$.

2. La matrice A ha matrice inversa
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} .$$
   La soluzione del sistema è $b = (-12, 2, 9)^T$
   Le matrici di iterazione di Jacobi e di Gauss-Seidel sono
$$H_J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} , \quad H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$
   Nessuna delle due è convergente ($\det(H_J) = 2$ e $\rho(H_{GS}) = 2$) per cui i metodi non convergono.

3. Si impone la formula esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ e si ottiene il sistema lineare
$$\begin{array}{lcl} a + b + c & = & 2 \\ -a - 1/3b + 2/3c & = & 0 \\ a + 1/9b + 4/9c & = & 2/3 \end{array}$$
   la cui soluzione è $a = 1/5$, $b = 1$, $c = 4/5$.
   La fomula risulta esatta anche per $f(x) = x^3$ ma non per $f(x) = x^4$ per cui il grado di precisione è 3.