Algebra II – 22 Settembre 2010

Esercizio 1. Siano M, N A-moduli e siano $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow M$ omomorfismi tali che $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Provare che $N = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} f$.

Esercizio 2. Sia A un dominio di integrità. Supponiamo che per ogni ideale $(0) \neq I \subset A$ esistano un ideale $(0) \neq J \subset A$ e un elemento $d \in A$ tali che $IJ = (d)$.

a. Provare che esiste un ideale finitamente generato $\bar{J} = (g_1, \dots, g_k)$ tale che $I\bar{J} = (d)$.

b. Provare che $\forall f \in I$ esiste $h_i \in A$ tale che $g_i f = h_i d$.

c. A è noetheriano.

Esercizio 3. Sia A un dominio con un numero finito di ideali primi. Indichiamo con $Q(A)$ il campo delle frazioni di A. Provare che esiste un elemento $a \in A$ tale che $Q(A) \cong A_a$.

Esercizio 4. Siano A, B, C matrici intere 3×3 e sia D la matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Supponiamo che $\det A = 28$, e $\det B = 7$.

Trovare le possibili forme di Smith di D, ciclici, esibendo un esempio di ciascuna.

Esercizio 5. Consideriamo l'ideale $I = (x^2y^3z^4,\ x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ 2 - xy) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$:

1. Provare che $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y, z]/I$ è finita e calcolarla,
2. Se $J = (3x^3 + xz - 2,\ xy + z^2 - 2) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$, provare che $I + J = 1$.