Algebra II – 3 Giugno 2010

Nome: Matricola:

Esercizio 1. Sia $A = \mathbb{Q}[x]$e sia $f : A^3 \longrightarrow A^3$ l'applicazione lineare data da $f(a, b, c) = (ax + b(x + 1) + cx, a + c, b(x + 1) + c(x + 1))$ descrivere il conucleo di f come prodotto diretto di A-moduli ciclici.

Esercizio 2. Sia A un dominio e siano $S_1 \subset S_2 \subset A$ due sottoinsiemi moltiplicativamente chiusi di A $(0 \notin S_2)$.

i) Provare che esiste un unico omomorfismo iniettivo di A-algebre $f : {S_1}^{-1}A \longrightarrow {S_2}^{-1}A$.

ii) Se $T = \{t \in S_2 \ | \ \exists s \in S_1 \ t.c. \ s \in (t)\}$ provare che ${S_1}^{-1}A \cong {S_2}^{-1}A$ se e solo se $S_2 = T$.

Esercizio 3. Sia $I \subset \mathbb{Q}[x, y]$ l'deale generato dal polinomio $xy^2 - 1$.

a. I e' primo?

b. I e' massimale?

c. Descrivere gli omomorfismi di anello $f : \mathbb{Q}[x, y]/I \longrightarrow \mathbb{Q}$.

Esercizio 4.

i) Sia M un A-modulo e siano N_1 e N_2 sottomoduli di M. Provare che se M/N_1 e M/N_2 sono noetheriani allora $M/(N_1 \cap N_2)$ e' noetheriano.

ii) Sia $A = K[x]/(fg^2)$ con $f, g, \in K[x]$, polinomi relativamente primi, provare che un A-modulo M e' noetheriano se e solo se i moduli M/fM e M/g^2M sono finitamente generati.

Esercizio 5. Sia $I = (x^2 + y^2 + z^2 - 2, y^2 - z^2 + 1, xz - 1) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

a. Provare che $\mathbf{V}(I)$ e' finito.

b. Descrivere $\mathbf{V}(I)$ come intersezione di varieta' irriducibili (su $\mathbb{Q}$).