Algebra II
8 Febbraio 2011

1. a) Sia M una matrice 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di determinante 2^n, sia $\varphi_M : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ definita da M, e sia $A = \operatorname{coker} \varphi_M$.

   Quante distinte classi di isomorfismo si ottengono al variare di M?.

   b) Sia p un numero primo e sia M una matrice 3×3 a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di determinante p^n; sia $\varphi_M : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ definita da M, e sia $A = \operatorname{coker} \varphi_M$. Dimostrare che il numero delle possibili classi di isomorfismo di A al variare di M dipende da n ma non da p.

2. Sia $A = k[x, y, z]$ e $J = (xy, yz, xz)$.
   i) Trovare i generatori di di $I(V(J))$.
   ii) Sia $I = (xy, xz - yz)$. Provare che $\sqrt{I} = J$.
   iii) Sia $\mathfrak{m} = (x, y, z)$, provare che $dim_k(J/\mathfrak{m}J) = 3$ e dedurre che J non puo' essere generato da due polinomi.

3. Sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli, sia P un ideale primo di A e sia $J = f(P)B = P^e$.
   i) Mostrare che $T = f(A \setminus P)$ e' una parte moltiplicativa di B e che $T \cap J = \emptyset$ se $f^{-1}(J) = P$.
   ii) Mostrare con un esempio che, in generale, J non e' un ideale primo di B.
   iii) Mostrare che esiste un ideale primo $Q \subset B$ tale che $f^{-1}(Q) = P$ se e soltanto se $f^{-1}(J) = P$.
   iv) Siano $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}_{(2)} \times \mathbb{Z}/(3)$ e sia f l' omomorfismo definito da $f(x) = (\frac{x}{1}, x+3\mathbb{Z})$. Determinare tutti e soli gli ideali primi P di $\mathbb{Z}$ per i quali esiste un ideale primo Q di $\mathbb{Z}_{(2)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tale che $f^{-1}(Q) = P$.

4. Sia $I \subset A$ un ideale, Provare che I e' radicale se e solo se per ogni primo $\mathfrak{p} \subset A$ l'deale $I_{\mathfrak{p}}$ e' radicale.

5. Provare che:

$$k[x, y, z]/(xyz - z^2, y + z - 2) \otimes_{k[x,y,z]} k[x, y, z]/(xy - z, z^2 - z) \cong k^2$$

.