Algebra II
2 Marzo 2011

1. Sia M un A modulo artiniano e sia $u : M \longrightarrow M$ un omomorfismo iniettivo allora u è un isomorfismo.

2. Siano $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ polinomi senza fattori comuni. Provare che $V(f) \cap V(g)$ è un insieme finito.

3. Sia K un campo e sia $A = K[x, y, z] \cong k[X, Y, Z]/(X^3, X^2Y, XZ)$.

   i) Determinare il nilradicale $\mathcal{N}(A)$ e descrivere $A/\mathcal{N}(A)$.

   ii) Determinare $\mathfrak{D}(A)$ l'insieme dei divisori di zero di A.

   iii) Sia $S = A \setminus \mathfrak{D}(A)$, descrivere $S^{-1}A$. è un anello locale?

   iv) Sia $\mathfrak{p} = (x, z) \subset A$. Provare che $\mathfrak{p}$ è primo e descrivere e $A_{\mathfrak{p}}$.

4. Sia M una matrice intera $n \times n$ tale che posto
   $A = \mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n$ si abbia $\forall x \in A$ esista un primo p_x
   tale che $p_x x = 0$.
   Dimostrare che M è di rango n, e che esiste p primo tale che
   $\det(M) = \pm p^k$ con $k \leq n$.

5. Sia $I \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$ l'ideale $(x + y + z, xy + yz + zx, xyz - 1)$.

   (a) Dimostrare che $V(I)$ è l'insieme delle permutazioni di $(1, \alpha, \alpha^2)$ con $\alpha = (-1 + i\sqrt{3})/2)$.

   (b) Dimostrare che I è radicale.