**Algebra II**
**19 Settembre 2011**

**Esercizio 1.** Consideriamo l'omomorfismo $\phi_a : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ dato da $\phi(x, y, z) = (2x + 8z, 2x + 4y + 6z, ax + 6y + 4z)$, con $a \in \mathbb{Z}$. Determinare la classe di isomorfismo di coker($\phi$) in funzione di $a$.

**Esercizio 2.** Decidere quali delle seguenti affermazioni e' vera e quale falsa. Provare se vera, dare un controesempio se falsa.

- a. Se $A$ e' un dominio artiniano allora e' un campo
- b. Se $A$ e' un PID allora $\mathfrak{J}(A) = (0)$.
- c. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ come $\mathbb{Z}$-moduli.

**Esercizio 3.** Siano $N \subset M$, $N' \subset M'$ $A$-moduli, tali che $M/N \cong M'/N' \cong A$. Provare che:

a. La successione $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ spezza.

b. Se $N \cong N'$ allora $M \cong M'$.

**Esercizio 4.** Sia $I = (xy^2 - z, xyz - 1, xz - y) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

a. Provare che $I = \sqrt{I}$

b. Trovare i divisori di zero in $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$

c. Se $f = x^5 + yz^2 - z^5$ provare che $V(I, f) = \emptyset$.