Algebra II
26 Gennaio 2012

1. Siano $I, J, K \subset A$ ideali di un anello commutativo. Provare che:
   (a) se $I + K = A$ e $J + K = A$ allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ $I \cap J + K^n = A$.
   (b) se $I \subseteq K$, $I \cap J = K \cap J$ e $I/(J \cap I) = K/(J \cap K)$ allora $I = K$.

2. a) Provare che un anello A e' somma diretta di un numero finito di campi se e solo se valgono le seguenti:
   (a) A contiene solo un numero finito di ideali
   (b) $\mathfrak{J}(A) = (0)$ ($\mathfrak{J}(A)$ e' il radicale di Jacobson di A).

   b) Provare che un anello finito e' somma diretta di campi se e solo se non contiene nilpotenti diversi da zero.

3. Dire quali delle seguenti affermazioni e' vera o falsa. Provare o dare un controesempio:
   (a) Siano N e N' sottomoduli di un A-modulo M. Se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$ vale $N'_{\mathfrak{m}} \subseteq N_{\mathfrak{m}}$ allora $N' \subseteq N$.
   (b) Se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$, $A_{\mathfrak{m}}$ e' un dominio allora A e' un dominio.

4. Sia A un anello noetheriano. Provare che:
   (a) Se A e' locale e il suo ideale massimale $\mathfrak{m} = (m)$ e' principale allora ogni ideale di A e'principale.
   (b) Se ogni ideale massimale di A e' principale allora $\dim A \leq 1$.

5. Sia $I = (z^2 + xy, x^2y - y^2z + z^2, x^2 + xy + 2yz, x^2 - yz) \subset k[x, y, z]$
   (a) Provare che I e' un ideale monomiale
   (b) Determinare un insieme di generatori del $k[y]$-modulo $M = k[x, y, z]/I$.
   (c) Il $k[y]$-modulo M e' un modulo libero?
   (d) Rappresentare M come conucleo di un omomorfismo di $k[y]$-moduli, decomporlo come prodotto diretto di moduli ciclici e calcolarne la forma di Smith