Algebra II - Correzione
26 Gennaio 2012

1. Siano $I, J, K \subset A$ ideali di un anello commutativo. Provare che:

   (a) se $I + K = A$ e $J + K = A$ allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ $I \cap J + K^n = A$.

   (b) se $I \subseteq K$, $I \cap J = K \cap J$ e $I/(J \cap I) = K/(J \cap K)$ allora $I = K$.

   Correzione (a) Per ipotesi esistono $a \in I$, $b \in J$ e $k_1, k_2 \in K$ tali che $a + k_1 = b + k_2 = 1$. Quindi si ha $1 = (a + k_1)(b + k_2) = c + q$ con $c = ab \in I \cap J$ $q = ak_2 + bk_1 + k_1k_2 \in K$. e per ogni $n \in \mathbb{N}$ Cosi' $1 = (c+q)^n = cp + q^n \in I \cap J + K^n$, con $p = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} c^{i-1} q^{n-i} \in A$.

   (b) Basta provare che $K \subset I$. Sia $k \in K$. Per ipotesi esistono $j_1 \in K \cap J = I \cap J$, $j_2 \in I \cap J$ e $i \in I$ tali che $k + j_1 = i + j_2$, da cui $k = i - j_1 + j_2 \in I$.

2. Dire quali delle seguenti affermazioni e' vera o falsa. Provare o dare un controesempio:

   (a) Siano N e N' sottomoduli di un A-modulo M. Se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$ vale $N'_\mathfrak{m} \subseteq N_\mathfrak{m}$ allora $N' \subseteq N$.

   (b) Se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$, $A_\mathfrak{m}$ e' un dominio allora A e' un dominio.

   Correzione (a) Vero. Consideriamo l'A-modulo $N'/(N' \cap N)$.

   Per ipotesi per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$ vale $N'_\mathfrak{m} \subseteq N_\mathfrak{m}$ e quindi $(N'/(N' \cap N))_\mathfrak{m} = N'_\mathfrak{m}/(N' \cap N)_\mathfrak{m} = N'_\mathfrak{m}/(N'_\mathfrak{m} \cap N_\mathfrak{m}) = 0$. Per proprieta' locale $N'/(N' \cap N) = 0$ da cui segue che $N' \subset N$.

   (b) Falso. Sia $A = \mathbb{Z}/(6)$, gli ideali massimali sono $(2)A$ e $(3)A$. A non e' un dominio ma $A_{(2)} = \mathbb{Z}/(2)$ e $A_{(3)} = \mathbb{Z}/(3)$ lo sono.

3. Sia A un anello noetheriano. Provare che:

   (a) Se A e' locale e il suo ideale massimale $\mathfrak{m} = (m)$ e' principale allora ogni ideale di A e'principale.

   (b) Se ogni ideale massimale di A e' principale allora $\dim A \leq 1$.

   Correzione (a) Sia $I \subset A$ un ideale proprio. Allora, dato che A è locale e Noetheriano, $I \subset \mathfrak{m}$ e I è finitamente generato, diciamo $I = (b_1, \ldots, b_m)$. Per ogni $i = 1, \ldots, m$, esistono $u_i \in A^*$ e $k_i \in \mathbb{N}_+$ tali che $b_i = u_i m^{k_i}$; allora, se $k = \min_i\{k_i\}$ avremo che $I = (m^k)$, come richiesto. Mostriamo dunque che per ogni elemento $b \in \mathfrak{m}$, ovvero $b \notin A^*$, esistono $u \in A^*$ e $k \in \mathbb{N}_+$ tali che $b = um^k$. Infatti, se $b = v_1 m$ con v_1 invertibile abbiamo finito; altrimenti, $v_1 \in \mathfrak{m}$ e $v_1 = v_2 m$, da cui segue che $(v_1) \subseteq (v_2)$; iterando il procedimento si costruisce una catena di ideali che si stabilizza; esiste allora un indice s tale che $(v_s) = (v_{s+1})$, ossia $v_{s+1} = av_s$ con $a \in A^*$, da cui $v_1 = am^s$ e $b = am^{s+1}$, come volevamo.

(b) Ogni catena di primi C di A e' contenuta in un ideale massimale, $\mathfrak{m}_C$, che per ipotesi e' principale. Localizzando in $\mathfrak{m}_C$ si ottiene, per il punto precedente, che la lunghezza di $C_\mathfrak{m}$ puo' essere solo 1 se $A_\mathfrak{m}$ e' un dominio oppure 0. Quindi la dimensione di ogni localizzato e' minore o uguale a 1. Per la corrispondenza fra i primi di A e dei localizzati otteniamo cosi' che $\dim A \leq \max_\mathfrak{m} \dim A_\mathfrak{m} \leq 1$.

4. Sia $I = (z^2 + xy, x^2y - y^2z + z^2, x^2 + xy + 2yz, x^2 - yz) \subset k[x, y, z]$

   (a) Provare che I e' un ideale monomiale

   (b) Determinare un insieme di generatori del $k[y]$-modulo $M = k[x, y, z]/I$.

   (c) Il $k[y]$-modulo M e' un modulo libero?

   (d) Rappresentare M come conucleo di un omomorfismo di $k[y]$-moduli e decomporlo come prodotto diretto di moduli ciclici e calcolarne la forma di Smith

Correzione (a) La base di Groebner di I rispetto all'ordinamento lessicografico con $x > y > z$ e' data da $\{x^2, xy, yz, z^2\}$ quindi I e' monomiale.

(b) M come $k[y]$-modulo e' generato da $1, x, z, xz$.

(c) Dato che $yx = 0$ in M, M contiene un elemento di torsione diverso da zero e quindi non e' libero.

(d) Consideriamo l'omorfismo $\phi : k[y]^4 \longrightarrow M$ dato da $\phi(e_1) = 1$, $\phi(e_2) = x$, $\phi(e_3) = z$ e $\phi(e_4) = xz$. Se $(a_1, a_2, a_3a_4) \in Ker(\phi)$ otteniamo che $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, yb_2, yb_3, yb_4)$ quindi $M \cong k^3 \times k[y]$.