Algebra II
8 Luglio 2011

Esercizio 1: Sia A un anello e $\mathfrak{J}(A)$ il radicale di Jacobson di A. Provare che:

i) $a \in A$ e' invertibile se e solo se $a + \mathfrak{J}(A)$ e' invertibile in $A/\mathfrak{J}(A)$.

ii) Se $a \in \mathfrak{J}(A)$ e' idempotente allora $a = 0$.

iii) Se $I \subset A$ e' un ideale costituito da elementi nilpotenti allora $I \subset \mathfrak{J}(A)$.

Soluzione [i)] Indichiamo con $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{J}(A)$ la proiezione. $a \in A$ e' invertibile, esiste $b \in A$ tale che $ab = 1$, quindi $\pi(a)\pi(b) = 1$. Viceversa se esiste $b \in A$ tale che $\pi(a)\pi(b) = 1$ si ha che $1 - ab \in \mathfrak{J}(A)$ e quindi $ab = 1 - (1 - ab)$ e' invertibile in A da cui la tesi.

[ii)] Sia $a \in \mathfrak{J}(A)$ tale che $a^2 = a$. Si ha che $1 - a$ e' invertibile quindi $a(1 - a) = 0$ implica che $a = 0$.

[iii)] Sia $a \in I$, allora per ogni $b \in A$ $ab \in I$ e quindi e' nilpotente. Ma allora $\forall b \in A$, $1 - ab$ e' invertibile, da cui segue che $a \in \mathfrak{J}(A)$.

Esercizio 2: Sia A un anello e sia $a \in A$, un elemento di A che non sia divisore di zero. Provare che se N e' un A modulo piatto allora $an \neq 0$ per ogni $0 \neq n \in N$.

Soluzione Dato che a non e' un divisore di zero l'omorfismo $\phi_a : A \longrightarrow A$ dato da $\phi_a(b) = ab$ e' iniettivo. Tensorizzando con N si ottiene quindi che anche $\bar{\phi}_a : N \longrightarrow N$ $\bar{\phi}_a(n) = an$ e' iniettivo, da cui la tesi,

Esercizio 3: Siano A, B e C anelli e $f : A \longrightarrow C$ e $g : B \longrightarrow C$ omomorfismi surgettivi. Definiamo $A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$. Provare che se A e B sono noetheriani allora $A \times_C B$ e' noetheriano.

Soluzione Osserviamo innanzitutto che se $\phi : S \longrightarrow T$ e' un omomorfismo surgettivo di anelli dato che gli ideali di T sono esattamente gli S-sottomoduli di T, T e' noetheriano come anello se e solo se T e' un S-modulo noetheriano.

Siano $\pi_A : A \times_C B \longrightarrow A$ e $\pi_B : A \times_C B \longrightarrow B$ le proiezioni. Quste sono omomorfismi surgettivi di anelli, dato che $\forall a \in A$ esiste $b \in B$ tale che $f(a) = g(b)$ e $\forall b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $g(b) = f(a)$. Quindi dato che gli ideali di A (risp. di B) sono $A \times_C B$ sottomoduli di A (risp. di B) si ha che A (risp. B) e' noetheriano (come anello) se e solo se e' noetheriano come $A \times_C B$ modulo. Da questo segue che $A \times B$ e' noetheriano come $A \times_C B$ modulo. Allora $A \times_C B$, che e' sottomodulo di un $A \times_C B$ modulo noetheriano e' $A \times_C B$ modulo noetheriano e quindi e' noetheriano come anello.

Esercizio 4: i) Sia $I \subset K[x_1, .., x_n]$ un ideale e sia $f \in K[x_1, .., x_n]$. Provare che $I : (f) = \frac{1}{f}(I \cap (f))$.

ii) Se $J = (f_1, \ldots, f_k)$ allora $I : J = \bigcap_1^k (I : (f_i))$

iii) Siano $I, J \subset K[x, y]$, $I = (g_1, g_2) = (x(x+y)^2, y)$ e $J = (f_1, f_2) = (x^2, x+y)$. CaLcolare $I : J$.

Soluzione [i)] Se $g \in \frac{1}{f}(I \cap (f))$ allora $gf \in I$ ossia $g \in I : (f)$. Viceversa, se $g \in I : (f)$ allora $gf \in I$ e quindi $gf \in (I \cap (f))$ cosi' $g \in \frac{1}{f}(I \cap (f))$.

[ii)] Se $g \in I : J$ allora $gf_i \in I$ per ogni i e quindi $g \in \bigcap_1^k (I : (f_i))$. Viceversa se $g \in \bigcap_1^k (I : (f_i))$ per ogni i allora $gj = \sum a_i g f_i \in I$ per ogni $j \in J$ e quindi $g \in I : J$.

[iii)] Per il punto precedente $I : J = (I : (f_1)) \cap (I : (f_2))$

Si ha che $I = (x^3, y)$ e quindi $I : (x^2) = (x, y)$. Per calcolare $I : (f_2))$ usiamo il punto i) e calcoliamo $\frac{1}{f}_2(I \cap (f_2))$. Una base di Groebner di $(tI, (1-t)f_2)$ rispetto all'ordinamento lessicografico con $t > x > y$ e' $(tx - x - y, ty, x^3 + y^3, xy + y^2)$ da cui si ottiene che $\frac{1}{f}_2(I \cap (f_1)) = (x^2 - xy + y^2, y) = (x^2, y)$. Cosi' $(I : J) = (x, y) \cap (x^2, y) = (x^2, y)$.