Algebra II
4 Luglio 2012

Esercizio 1. Sia $A = \mathbb{Q}[x]$ e sia $\varphi : A^3 \longrightarrow A^3$ l'omomorfismo definito da $\varphi(a, b, c) = (2xa + xb, (2 + x)c, (1 + x)a - b)$. Trovare il conucleo di φ e determinarne una base come $\mathbb{Q}$-modulo.

Esercizio 2. Decidere quali delle seguenti affermazioni e' vera e quale falsa. Provare se vera, giustificare o dare un controesempio se falsa.

a. Se A e' un dominio a ideali principalil, B un dominio e $\varphi : A \longrightarrow B$ e' un omomorfismo surgettivo allora B e' un campo oppure φ e'un isomorfismo.

b. Siano $I, J \subset \mathbb{C}[x_1, .., x_n]$ ideali, $I \subseteq J$. Se I e' 0-dimensionale allora $V(J)$ e' finita.

c. Se A e' un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e M un A-modulo finitamente generato, $M \neq 0$, allora $\mathfrak{V}(Ann(M/\mathfrak{m}M)) = \{\mathfrak{m}\}$.
(dove $\mathfrak{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$)

d. Se M e' un A-modulo piatto allora per ogni ideale $I \subset A$ si ha $I \otimes_A M \cong IM$.

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo e siano $I, J \subseteq A$ ideali di A. Provare che:

a. $Hom_A(A/I, A/J) \cong (J : I)/J$.

b. Se $(I, J) = A$ allora $Hom_A(A/I, A/J) = 0$.

c. Trovare $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(55), \mathbb{Z}/(121))$.

Esercizio 4. Siano $A = K[x, y, z]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in un campo K, $I = (xz - y, yz - x) \subset A$ e $B = A/I$.

a. Descrivere $\mathbf{V}(I)$ come unione di varieta' irriducibili.

b. Se $S = A \setminus (x, y)$, descrivere $S^{-1}B$.