Algebra II
6 Giugno 2012

Esercizio 1 . Sia $A = k[x, y, z]$, $I = (x^2 + y^2 - z, xy - 1)$.

i) Dimostrare che A/I è un $k[z]$ modulo finitamente generato.

ii) Trovarne un insieme di generatori

iii) decomporre A/I come somma diretta di $k[z]$ moduli ciclici

Esercizio 2. Decidere quali delle seguenti affermazioni e' vera e quale falsa. Provare se vera, giustificare o dare un controesempio se falsa.

a. Sia $A = \mathbb{C}[t]$. L'A-modulo $A[x]/(x^2 - t)$ e' proiettivo? e' piatto?

b. Se A e' un PID e M e' un A-modulo non finitamente generato privo di torsione allora M e' libero.

c. Se $A = \mathbb{Z}$, $S = \{3^n 5^m \mid m, n \in \mathbb{N})$ e $T = \{15^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ allora $S^{-1}\mathbb{Z} = T^{-1}\mathbb{Z}$.

d. Siano M, N A-moduli finitamente generati. Se $M \otimes_A N = 0$ a allora $Ann(M) + Ann(N) = A$.

Esercizio 3: Sia $A = \mathbb{Q}[x]/(x^5 - 3x^2) \oplus \mathbb{Z}/(12)$.

i) Tovare gli elementi nilpotenti e divisori di zero in A.

ii) Trovare, se esistono, gli ideali primi $\mathfrak{p}$ in A tali che $A_\mathfrak{p}$ e' un campo.

Esercizio 4: Sia $A = \mathbb{C}[x, y, z]$ e $I = (xy^3, xy + y^2, y^2 - z^2)$.

i) Calcolare $I_1 = I \cap \mathbb{C}[y, z]$ e $I_2 = I \cap \mathbb{C}[z]$.

ii) Se $\pi_1 : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ e' la proiezione data da $\pi_1(a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_3)$ e' vero che $\pi_1(V(I)) = V(I_1)$?