Algebra II
19 Settembre 2012
Traccia delle soluzioni

Esercizio 1: Sia Sia $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ l'omomorfismo dato da $\phi(x, y, z) = (6x+2y+4z, ay+4z, 2x+2y+2z)$ con a numero intero. Determinare la classe di isomorfismo di coker(ϕ) in funzione di a. Esistono valori di a per cui coker(ϕ) e' infinito?

Soluzione la matrice che rappresenta ϕ (rispetto alle basi canoniche) e' :

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Dopo eventuali semplificazioni, calcolando gli ideali Δ_i dei determinanti dei minori $i \times i$ si ottiene:

Se $a = 2k + 1$ $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$ e $\Delta_3 = 4(a - 8)$ da cui coker$(\phi) \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2a - 16)$ e quindi per ogni a dispari coker(ϕ) e' finito.

Se $a = 2k$ $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$ e $\Delta_3 = 4(a - 8)$ da cui coker$(\phi) \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(a - 8)$ e quindi se $a = 8$ coker(ϕ) e' infinito.

Esercizio 2: Sia A un anello commutativo con identita'. Provare che se ogni ideale di A e' primo allora A e' un campo.

Soluzione A e' un dominio perche (0) e' primo. Se ogni elemento no zero e' invertibile allora A e' un campo, altrimenti sia $x \in A$ non invertibile. (x) e' un ideale primo. Dato che anche (x^2) e' primo si ha che deve essere $(x) = (x^2)$, da cui $x = ax^2$ e quindi $x(1 - ax) = 0$. Dato che x non e' invertibile allora $x = 0$.

Esercizio 3: Sia M un A-modulo noetheriano e sia $I = (0 : M)$. Provare che A/I e' noetheriano.

Soluzione$M$ è noetheriano e quindi finitamente generato. Siano $\{x_1, .., x_n\}$ un insieme di generatori. Consideriamo l'omomorfismo $\varphi : A \longrightarrow M^n$ dato da $\varphi(a) = (ax_1, .., ax_n)$. Proviamo che $ker(\varphi) = I$. Se $a \in Ker(\varphi)$, allora $ax_i = 0$ per ogni i e quindi se $m = \sum_i b_i x_i \in M$ si ha $am = \sum_i b_i(ax_i) = 0$ e $a \in I$. Il viceversa e' ovvio. Da questo segue che $A/ker(\varphi) \cong Im(\varphi) \subset M^n$. Allorai A essendo isomorfo ad un sottomodulo di M^n,(che è un A-modulo noetheriano), è noetheriano come A modulo e quindi anche come A/I-modulo.

Esercizio 4: Sia M un A-modulo e sia $Supp(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\}$. Provare che:

i) Se $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$ e' una successione esatta allora $Supp(M) = Supp(M') \cup Supp(M")$.

ii) Se M e N sono A-moduli finitamente generati allora $Supp(M \otimes_A N) = Supp(M) \cap Supp(N)$.

Soluzione i) Dato che per ogni $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ la successione $0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M"_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$ e' esatta e' immediato che $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ se e solo se $M'_{\mathfrak{p}} \neq 0$ o $M"_{\mathfrak{p}} \neq 0$ da cui la tesi.

ii) Se $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ si ha che $(M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}$. Dato che $A_{\mathfrak{p}}$ e' un anello locale $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \neq 0$ se e solo se $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ e $N_{\mathfrak{p}} \neq 0$.

Esercizio 5: Sia $I = (x^2z - x^2t^3, x^2y^4t + x^2y^3 - x^3z, xt^2) \subset \mathbb{Q}[x, y, z, t] = A$

i) I e' monomiale?

ii) trovare una decomposizione primaria di I, i primi associati e i primi minimali.

iii) Trovare i nilpotenti e i divisori di zero di A/I.

Soluzione i) La base di Gröbner ridotta di I e' (x^2z, x^2y^3, xt^2) e quindi I e' monomiale.

ii)Una decomposizione primaria minimale e' $I = (x^2, t^2) \cap (y^3, z, t^2) \cap (x)$, quindi i primi associati sono $(x, t), (y, z, t)$ e (x) e i primi minimali sono (y, z, t) e (x).

iii) Per il punto precedente i divisori di zero, che sono l'unione dei primi associati a (0) in A/I sono $\mathfrak{D} = (x, t)A/I \cup (y, z, t)A/I$ mentre i nilpotenti, che sono dati dall'intersezione dei primi minimali associati a zero sono $\mathfrak{N} = (y, z, t)A/I \cap (x)A/I = (xy, xz, xt)A/I$.