Algebra II
4 Luglio 2012
Traccia delle soluzioni

Esercizio 1. Sia $A = \mathbb{Q}[x]$ e sia $\varphi : A^3 \longrightarrow A^3$ l'omomorfismo definito da $\varphi(a,b,c) = ((2a+b)x, c(2+x), (a-b)+ax)$. Trovare il conucleo di φ e determinarne una base come $\mathbb{Q}$-modulo.

Soluzione La matrice che rappresenta φ (rispetto alle basi canoniche) e'

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 2x & x & 0 \\ 0 & 0 & 2+x \\ 1+x & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\det(M_\varphi) = -x(x+2)(x+3)$, la forma di Smith e'

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+5x^2+6x \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathrm{coker}(\varphi) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3+5x^2+6x)$ e $\{1, x, x^2\}$ e' una sua base come $\mathbb{Q}$-modulo.

Esercizio 2. Decidere quali delle seguenti affermazioni e' vera e quale falsa. Provare se vera, giustificare o dare un controesempio se falsa.

a. Se A e' un dominio a ideali principali, B un dominio e $\varphi : A \longrightarrow B$ e' un omomorfismo surgettivo allora B e' un campo oppure φ e'un isomorfismo.

b. Siano $I, J \subset \mathbb{C}[x_1, .., x_n]$ ideali, $I \subseteq J$. Se I e' 0-dimensionale allora $V(J)$ e' finita.

c. Se A e' un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e M un A-modulo finitamente generato, $M \neq 0$, allora $\mathfrak{V}(Ann(M/\mathfrak{m}M)) = \{\mathfrak{m}\}$.
(dove $\mathfrak{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$)

d. Se M e' un A-modulo piatto allora per ogni ideale $I \subset A$ si ha $I \otimes_A M \cong IM$.

Soluzione

a. Vera. Dato che φ e' un omomorfismo surgettivo $B \cong A/Ker(\varphi)$ quindi $Ker(\varphi) = (0)$ o $Ker(\varphi) = \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ primo).

b. Vera. Dato che $V(J) \subseteq V(I)$ e $V(I)$ e' finita.

c. Vera. Dato che $\mathfrak{m} \in Ann(M/\mathfrak{m}M)$ si deve solo provare che $Ann(M/\mathfrak{m}M \neq 0$. Ma in tal caso $M = \mathfrak{m}M$ e per Nakayama M sarebbe 0, contro le ipotesi.

d. Vero. Segue immediatamente dalla definizione di piattezza tensorizzando per M la successione esatta:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I.$$

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo e siano $I, J \subseteq A$ ideali di A. Provare che:

a. $Hom_A(A/I, A/J) \cong (J : I)/J$.
b. Se $(I, J) = A$ allora $Hom_A(A/I, A/J) = 0$.
c. Trovare $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(55), \mathbb{Z}/(121))$.

Soluzione [a.]

[b.] Basta provare che $(J : I) \subseteq J$. Per ipotesi esistono $u \in I, v \in J$ tali che $u + v = 1$ quindi se $a \in (J : I)$ si ha $a = au + av \in J$

[c.] $((121) : (55))/(121) = (11)/(121)$.

Esercizio 4. Siano $A = K[x, y, z]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in un campo K, $I = (xz - y, yz - x) \subset A$ e $B = A/I$.

a. Descrivere $\mathbf{V}(I)$ come unione di varieta' irriducibili.
b. Se $S = A \setminus (x, y)$, descrivere $S^{-1}B$.

Soluzione [a.] La base di Groebner ridotta rispetto all'ordinamento lessicografico e' $(x - yz, yz^2 - y)$ quindi $\sqrt{I} = (x, y) \cap (x + y, z + 1) \cap (x - y, z - 1)$ e $V(I) = V(\sqrt{}) = V(x, y) \cup V(x + y, z + 1) \cup V(x - y, z - 1)$.

[b.] Si ha $S^{-1}(A/I) \cong S^{-1}A/S^{-1}I = S^{-1}A/S^{-1}(x, y) \cong S^{-1}(A/(x, y)) \cong K(z)$.