Algebra II
14 Febbraio 2014

Esercizio 1: Sia $M_\alpha \cong coker(\varphi_\alpha)$ dove $\varphi_\alpha : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, è l'omomorfismo di $\mathbb{Z}$ moduli dato da $\varphi_\alpha(x,y,z) = (9\alpha x - 8\alpha y - \alpha z, 4\alpha x - 3\alpha y - \alpha z, -6\alpha x + 7\alpha y - \alpha z)$.

i) Esprimere M_α come somma diretta di $\mathbb{Z}$- moduli ciclici, al variare di $\alpha \in \mathbb{Z}$.

ii) Trovare se esistono i $p \in \mathbb{Z}$ primi e gli $\alpha \in \mathbb{Z}$ tali che lo $\mathbb{Z}$ modulo $M_\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ sia ciclico.

iii) Descrivere, al variare di $\alpha \in \mathbb{Z}$ lo $\mathbb{Z}$-modulo $(M_\alpha)_{(5)}$.

Giustificare le risposte.

Esercizio 2. Siano $I, J, K \subset A$ ideali di un anello commutativo A. Provare le seguenti affermazioni o dare un controesempio:

i) $\sqrt{(I, JK)} = \sqrt{(I,J)} \cap \sqrt{(I,K)}$.

ii) $\sqrt{I + \sqrt{J}} = \sqrt{I+J}$

iii) $\sqrt{I} + \sqrt{J} = \sqrt{I+J}$.

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo, $I \subset A$ un ideale nilpotente e sia $\varphi : M \longrightarrow N$ un omomorfismo di A-moduli. Provare che se $\overline{\varphi} : M/IM \longrightarrow N/IN$ è surgettivo allora anche φ è surgettivo.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2 + y^2 + z^2 - 2, y^2 - z^2 + 1, xz - 1) \subset \mathbb{Q}[x,y,z]$.

a. Provare che $\mathbf{V}(I)$ e' finito.

b. Decomporre $\sqrt{I}$ come intersezione di ideali massimali (in $\mathbb{Q}[x,y,z]$).