Algebra II – 4 Settembre 2013

Esercizio 1. Sia A un anello tale che tutti i divisori di zero appartengono al radicale di Jacobson $\mathfrak{J}(A)$. Provare che se $a, b \in A$ e $(a) = (b)$ allora a e b sono associati .

Esercizio 2. Sia A un anello noetheriano e $\varphi : A \longrightarrow A$ un omomorfismo surgettivo.

i) Provare che che φ è iniettivo

ii) Provare che per ogni coppia di ideali $I, J \subset A$, vale $\varphi(I \cap J) = \varphi(I) \cap \varphi(J)$.

iii) Le affermazioni (i) e/o (ii) sono vere se A non è noetheriano? (giustificare le risposte).

Esercizio 3. Sia $V = \{\alpha_1, .., \alpha_m\} \subset \mathbb{C}^n$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$ e sia $A = \mathbb{C}[x_1, .., x_n]/I(V)$. Provare che:

i) Esistono m elementi $e_{\alpha_1}, ..., e_{\alpha_m} \in A$, $e_{\alpha_i} \neq 0$ tali che $e_{\alpha_i}^2 = e_{\alpha_i}$, $e_{\alpha_i} e_{\alpha_j} = 0$ se $i \neq j$ e $\sum_i e_{\alpha_i} = 1$

ii) Quali e quanti sono gli idempotenti di A? (un elemento $a \in A$ è idempotente se $a^2 = a$).

Esercizio 4. Sia $A = \mathbb{Q}[x, y, z]$ e sia M l'A-modulo Sia $M = A/(xyz - z^2, xy^2 - 4) \otimes_A A/(yz, x - y^2)$.

i) Calcolare la dimensione di M come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$

ii) Trovare gli ideali primi $\mathfrak{p} \subset A$ tali che $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$.