Algebra II Tracce delle soluzioni
11 Giugno 2013

Esercizio 1: i) Sia K un campo finito e sia $f(x) \in K[x]$ allora $K[x]/(f(x))$ e' un anello ridotto se e solo se $\gcd(f, f') = 1$,

ii) Se $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e' monico e $\gcd(f, f') = 1$, provare che l'insieme dei primi $p \in \mathbb{Z}$ tali che $(\mathbb{Z}/p)[x]/(\bar{f}(x))$ non è un anello ridotto è un insieme finito.

Soluzione Vediamo innanzitutto che $\gcd(f, f') = 1$ se e solo se $f = \prod f_i$ con f_i irriducibili e $f_i \neq f_j$ quando $i \neq j$. Se esiste un fattore ${f_i}^s$, con $s > 1$ allora scrivendo $f = {f_i}^s h$ si ha $f' = {f_i}^{s-1}(s{f_i}'h + f_i g')$ e quindi $\gcd(f, f') \neq 1$.

Viceversa se g e' un fattore irriducibile di $\gcd(f, f')$ allora $f = gh$ e $f' = g'h + gh' = gq$ da cui segue che $g|g'h$. Se $g' \neq 0$ allora $\deg g' < \deg g$ e quindi $g|h$ da cui $f = g^2 h_1$ ha un fattore multiplo. D'altra parte se g e' irriducibile non si puo' avere $g' = 0$. Infatti in tal caso se $p = char K$ si avrebbe $g(x) = \tilde{g}(x^p) = (\hat{g}(x))^p$.

Supponiamo che $\gcd(f, f') = 1$. Si ha quindi $A = K[x]/(f(x)) \cong \prod K[x]/(f_i(x)) = \prod A_i$, dato che gli f_i sono irriducibili, $K[x]/(f(x))$ è prodotto diretto di domini e quindi $\mathfrak{N}(A) \cong \prod \mathfrak{N}(A_i) = (0)$.

Viceversa, se $\gcd(f, f') = h \neq 1$ allora si ha che $f = \prod {f_i}^{s_i}$ con almeno $s_i \geq 2$ per qualche i. Quindi l'elemento $\prod f_i(x) \in \mathfrak{N}(A) \neq (0)$

ii) sia $r = res(f, f') \neq 0$ dato che $\gcd(f, f') = 1$. Si ha che esistono $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tali che $af + bf' = r$.

Allora per p che non divide r si ha $\gcd(\bar{f}, \bar{f}') = 1$ e quindi per la prima parte $(\mathbb{Z}/p)[x]/(\bar{f})$ e' ridotto.

Esercizio 2. Siano $A = (\mathbb{Z}/(200))_{18}$, $B = (\mathbb{Z}/(200))_6$, $C = (\mathbb{Z}/25) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/40)$ e $D = \mathbb{Z}_{(3)}[x]/(6x-1)$. Decidere quali di questi anelli sono isomorfi (motivando le risposte) e trovarne la cardinalità.

Soluzione. Se $S_1 = \{18^k\}$ e $S_2 = \{6^k\}$ dato che il saturato $S^* = \{2^k 3^h\}$ di S_1 è uguale al saturato di S_2 e $S^{*-1}\mathbb{Z}/(200) = S_1{}^{-1}\mathbb{Z}/(200) = S_2{}^{-1}\mathbb{Z}/(200)$. Inoltre $S^{*-1}\mathbb{Z}/(200) = S^{*-1}\mathbb{Z}/(8) \times S^{*-1}\mathbb{Z}/(25)$ e quindi dato che $2 \in S^*$ otteniamo che $S^{*-1}\mathbb{Z}/(8) = (0)$ mentre essendo $2, 3 \in (\mathbb{Z}/(25))^*$ si ha $S^{*-1}\mathbb{Z}/(25) = \mathbb{Z}/(25)$. Quindi $\#A = \#B = 25$.

$C = (\mathbb{Z}/25) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/40) \cong \mathbb{Z}/(25, 40) = \mathbb{Z}/(5)$.

Intanto si ha $D = \mathbb{Z}_{(3)}[x]/(6x-1) = (\mathbb{Z}_{(3)})_6$. Infatti si consideri l'omomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}_{(3)}[x] \longrightarrow (\mathbb{Z}_{(3)})_6$ dato da $\varphi(x) = \frac{1}{6}$. Si ha che il nucleo di φ contiene $(6x-1)$ e questo ideale è massimale dato che $6x-1$ é irriducibile. φ è surgettivo, dato che ogni elemento di $(\mathbb{Z}_{(3)})_6$ puo' essere scritto come $\frac{a}{6^k}$ con $a \in \mathbb{Z}_{(3)}$ quindi $D \cong (\mathbb{Z}_{(3)})_6$.

$\mathbb{Z}_{(3)}$ è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m} = (3)\mathbb{Z}_{(3)}$, dato che in $(\mathbb{Z}_{(3)})_6$, si ha $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, otteniamo $\mathfrak{m}^e = (1)$ e quindi $(\mathbb{Z}_{(3)})_6 = \mathbb{Q}$.

Esercizio 3. Sia A un anello artiniano.

Provare che $A = A^* \cup \mathfrak{D}(A)$, Dove $\mathfrak{D}(A)$ sono i divisori di zero di A.

Se A e' locale e $S \subset A$ un insieme moltiplicativamente chiuso, provare che $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$ e' un omomorfismo surgettivo.

Soluzione Sia $a \in A \setminus A^*$. Considerando la catena $(a) \supset (a^2) \supset ...$, dato che A è artiniano, esiste k tale che $(a^k) = (a^{k+1})$. Da cui segue che esiste $b \in A$ tale che $a^k(ab - 1) = 0$. Dato che $a \notin A^*$ si ha la tesi.

Se A e' locale sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Ci sono due possibilita' $S \cap \mathfrak{m} \neq \emptyset$ o $S \cap \mathfrak{m} = \emptyset$.

Per la prima parte dell'esercizio, dato che ogni elemento e' unita' o divisore di zero, se S contiene un elemento di $\mathfrak{m} = \mathfrak{N}(A)$ (dato che A e' artiniano) allora $0 \in S$ e $S^{-1}A = (0)$.

Se $S \cap \mathfrak{m} = \emptyset$ allora ogni elemento di S e' unita' e quindi $S^{-1}A = A$.

Esercizio 4. Siano $I = (x^2 - y^2 - yz, xy - y^2z)$ e $J = (x^2 - y^2 - yz, xy - y^2z, y^3z^2 - y^3 - y^2z)$ ideali in $\mathbb{C}[x, y, z]$. $\mathfrak{I}(V(I) = \sqrt{I}$?

Soluzione. Dato che $I \subset J$ è sufficiente vedere che $y^3z^2 - y^3 - y^2z \in J$. Calcolando la base di Gröbner di I si trova che $I = (x^2 - y^2 - yz, xy - y^2z, y^3z^2 - y^3 - y^2z) = J$

$\mathfrak{I}(V(I) = \sqrt{I}$ quindi é sufficiente vedere se I è radicale. Fattorizzando l'ultimo polinomio della base di Gröbner si ha $y^2(yz^2 - y - z) \in I$ e dato che $y^2z^2 \notin LT(I)$ si ha $y(yz^2 - y - z) \in \sqrt{I} \setminus I$.