Algebra II - 8 Settembre 2014

Esercizio 1. Sia A un anello noetheriano e siano I, J ideali di A tali che ogni ideale primo di A contiene o I o J ma non entrambi. Provare che :

i) $A = I + J$; ii) Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(IJ)^n = (0)$.

Esercizio 2. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello Noetheriano locale e sia $k = A/\mathfrak{m}$ il suo campo residuo. Per ogni A-modulo finitamente generato, M, definiamo $r(M)$ il minimo numero dei suoi generatori. Provare che:

i) Per ogni M, N, A moduli finitamente generati, vale $r(M \otimes_A N) = r(M)r(N)$

ii) Se $I \subset A$ é un ideale e $r(I) > 1$, allora $r(I^2) < r(I)^2$

iii) Se ogni ideale in A è un A-modulo piatto allora A è PID (o un campo).

Esercizio 3. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false? Provare se vere, dare un controesempio se false.

i) Ogni ideale massimale in $\mathbb{Z}_{(2)}[x]$ ha non meno di due generatori.

ii) $M = (\mathbb{Z}/(15) \oplus \mathbb{Z}/(18))_{(3)}$ è ciclico.

iii) Sia M_a lo $\mathbb{Z}$-modulo generato da elementi m_1, m_2, m_3 che soddisfano le relazioni $2m_1 - m_2 = 0, m_1 + m_2 + m_3 = 0, m_1 + am_2 = 0$, $a \in \mathbb{Z}$. Per ogni $0 < a \in \mathbb{Z}$ esistono dei valori $n \in \mathbb{N}$ per cui $M_a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n \neq 0$.

Esercizio 4. Sia $I = (xz - yz, y^2 - z, xyz - 1) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

i) Trovare in I, se esiste, un polinomio univariato in y,

ii) Trovare l'insieme

$$\Sigma = \{q(y) \in \mathbb{Q}[y] \mid V_{\mathbb{Q}}((q, I)) \neq \emptyset\}$$

(dove $V_{\mathbb{Q}}(I) = \{\alpha \in \mathbb{Q}^3 \mid f(\alpha) = 0, \forall f \in I\}$).

iii) Σ e' un ideale?