Algebra II
25 Giugno 2014

Esercizio 1. Decidere se le seguenti affermazioni sono vere o false. Provare se vere, dare un controesempio se false.

i) Se $I, J \subset R$ si ha $I \subset J$ se e solo se $I_P \subset J_P$ in R_P per ogni massimale $P \subset R$.

ii) Se $I, J \subset A$ sono ideali di un anello noetheriano A, $\sqrt{I+J} = \sqrt{I} + \sqrt{J}$.

iii) Sia A un anello noetheriano. Ogni endomorfismo di A surgettivo è un isomorfismo.

Soluzione i) Vero. Dire che $I \subset J$ equivale a dire che $I \cap J = I$, ossia che $I/I \cap J = 0$. Dato che essere 0 è una proprietà locale l'affermazione è vera.
ii) Falso (per ogni anello). Dato che $\sqrt{I} \subset \sqrt{I+J}$ e $\sqrt{J} \subset \sqrt{I+J}$ si ha $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I+J}$. Se però si considerano gli ideali $\sqrt{I} = I = (x^2 + y^2) \subset \mathbb{Q}[x, y]$ e $\sqrt{J} = J = (y^2 + 1) \subset \mathbb{Q}[x, y]$, si ha $\sqrt{I} + \sqrt{J} = (x^2 + y^2, y) = (x^2, y) \subsetneq \sqrt{I+J} = (x, y)$.
iii) Vero. Vogliamo dimostrare che $Ker(\varphi) = (0)$. Consideriamo $Ker(\varphi) \subset Ker(\varphi^2)$...., questa catena è stazionaria quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $Ker(\varphi^n) = Ker(\varphi^{n+1})$. Sia $a \in Ker(\varphi)$, dato che φ è surgettivo, anche φ^n lo è e quindi esiste $b \in A$ tale che $a = \varphi^n(b)$, ma allora $\varphi^{n+1}(b) = \varphi(a) = 0$, ossia $b \in Ker(\varphi^{n+1}) = Ker(\varphi^n)$ e quindi $a = 0$.

Esercizio 2. Sia A un anello commutativo con identità e sia $\mathfrak{p} \subset A$ un primo minimale.

i) Provare che ogni elemento in $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ è nilpotente.

ii) Provare che ogni elemento in $\mathfrak{p}$ è un divisore di zero in A.

iii) Se A è ridotto, provare che ogni divisore di zero è contenuto in un primo minimale.

Soluzione i) Dato che i primi in $A_{\mathfrak{p}}$ sono i in corrispondenza con i primi di A contenuti in $\mathfrak{p}$, per la minimalità di $\mathfrak{p}$ si ha che $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ è l'unico primo di $A_{\mathfrak{p}}$ e quindi coincide con il nilradicale di $A_{\mathfrak{p}}$.
ii) Se $0 \neq a \in \mathfrak{p}$, per il punto precedente $\frac{a}{1} \in A_{\mathfrak{p}}$ è nilpotente, quindi esiste $b \in A \setminus \mathfrak{p}$ tale che $a^n b = 0$ in A per un qualche n che supponiamo minimo con questa proprietà, cosí o a è divisore di zero o $a^{n-1}b = 0$ che contraddice la minimalità di n.
iii) Se $a \in A$ è un divisore di zero, esiste $0 \neq b \in A$ tale che $ab = 0$. Dato che A è ridotto $b \notin \mathfrak{N}(A)$, il nilradicale di A, che è l'intersezione dei primi minimali di A, quindi esiste almeno un primo minimale $\mathfrak{q} \subset A$ tale che $b \notin \mathfrak{q}$, allora, dato che $ab = 0$ si deve avere $a \in \mathfrak{q}$.

Esercizio 3. Provare che un dominio A è un campo se e solo se ogni A modulo è proiettivo.
Soluzione Se A è un campo allora ogni A-modulo è uno spazio vettoriale e ogni successione esatta di spazi vettoriali spezza, quindi ogni A modulo è proiettivo.

Viceversa sia $0 \neq a \in A$ e consideriamo l'ideale (a) e la successione esatta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_a} A \longrightarrow A/(a) \longrightarrow 0$$

dove $f_a(b) = ab$. Per ipotesi la successione spezza quindi esiste $g : A \longrightarrow A$ tale che $g \circ f_a = id_A$, cosí $g(f_a(1)) =$

$1 = g(a)$. Dato che g è un omomorfismo di A-moduli, $1 = g(a) = ag(1)$ e quindi a è invertibile in A e A è un campo.

Esercizio 4. Sia $I = (z^2 - x, x^4 - y^2 + yz^4 - yx^2)$ ideale di $A = \mathbb{Q}[x, y, z]$ e sia $S = \{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

i) Trovare i primi minimali associati ad I.

i) Provare che $S^{-1}I \subset S^{-1}A$ è un ideale proprio.

iii) Trovare due ideali $J, J' \subset S^{-1}A/I$ tali che

$$S^{-1}A/I = J \oplus J'$$

.

Soluzione i) Calcoliamo una base di Gröbner di I con ordinamento lex $z > y > x$, otteniamo $I = (z^2 - x, y^2 - x^4)$, da cui $\sqrt{I} = \sqrt{(z^2 - x, y + x^2)} \cap \sqrt{(z^2 - x, y - x^2)} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} = I_1 \cap I_2$, infatti si ha $\mathbb{Q}[x, y, z]/I_i \cong \mathbb{Q}[z]$, $i = 1, 2$, cosí I_1 e I_2 sono primi e quindi (dato che $I_i \not\subset I_j$, $i \neq j$) sono i primi minimali associati ad I.
ii) Dal punto precedente (avendo usando un ordinamento di eliminazione per x) otteniamo che $I \cap \mathbb{Q}[x] = 0$ quindi $S \cap I = \emptyset$ e $S^{-1}I \subsetneq S^{-1}A$.
iii) Per trovare una decomposizione (come modulo) di $S^{-1}A/I$ come somma diretta di ideali $J \oplus J'$ dobbiamo trovare due idempotenti, non banali, $e_1, e_2 \in S^{-1}A$ tali che $e_1 + e_2 = 1$. Siano $e_1 = \frac{y+x^2}{2x^2}, e_2 = \frac{-y+x^2}{2x^2}$. Dato che in $S^{-1}A$ si ha $e_1 + e_2 = 1$, ${e_1}^2 = e_1$, ${e_2}^2 = e_2$ ed $e_1e_2 = 0$ allora $J = (e_1), J' = (e_2)$.
(Notare che J e J' sono loro stessi anelli, isomorfi rispettivamente a $S^{-1}A/J'$ e $S^{-1}A/J$).