Algebra II - 8 Settembre 2014
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Sia A un anello noetheriano e siano I, J ideali di A tali che ogni ideale primo di A contiene o I o J ma non entrambi. Provare che :

i) $A = I + J$; ii) Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(IJ)^n = (0)$.

Soluzione. i) Se $(I + J) \subsetneq A$ allora esiste un ideale massimale $\mathfrak{m}$ tale che $(I + J) \subset \mathfrak{m}$ e quindi tale che $\mathfrak{m}$ contiene sia I che J contro le ipotesi.
ii) dato che IJ è contenuto sia in I che in J allora è contenuto in ogni ideale primo di A, e quindi nel nilradicale $\mathfrak{N}(A)$. Dato che A è noetheriano, l'ideale $\mathfrak{N}(A)$ è nilpotente ed esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(IJ)^2 \subseteq \mathfrak{N}(A)^n = (0)$.

Esercizio 2. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello Noetheriano locale e sia $k = A/\mathfrak{m}$ il suo campo residuo. Per ogni A-modulo finitamente generato, M, definiamo $r(M)$ il minimo numero dei suoi generatori. Provare che:

i) Per ogni M, N, A moduli finitamente generati, vale $r(M \otimes_A N) = r(M)r(N)$

ii) Se $I \subset A$ è un ideale e $r(I) > 1$, allora $r(I^2) < r(I)^2$

iii) Se ogni ideale in A è un A-modulo piatto allora A è PID (o un campo).

Soluzione Osserviamo innanzitutto che, per il Lemma di Nakayama, se M e' finitamente generato si ha che $r(M) = dim_k(M \otimes_A k) = dim_k M/\mathfrak{m}M$
i) Si ha $(M \otimes_A N) \otimes k \cong (M \otimes k) \otimes (N \otimes k) \cong k^n \otimes k^m \cong k^{nm}$, con $nm = r(M)r(N)$.

ii) Se $I = (g_1, .., g_n)$, $n > 1$ allora I^2 é generato dagli $\frac{n(n+1)}{2} < n^2$ prodotti $g_i g_j$.
iii) Dato che ogni ideale é piatto tensorizzando per J la successione

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

si ottiene

$$0 \longrightarrow I \otimes J \longrightarrow J \longrightarrow J/IJ \longrightarrow 0$$

Considerando allora il diagramma commutativo, con β, γ isomorfismi:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I \otimes J & \longrightarrow & J & \longrightarrow & J/IJ & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow^{\alpha} & & \downarrow^{\beta} & & \downarrow^{\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & IJ & \longrightarrow & J & \longrightarrow & J/IJ & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

si ottiene $I \otimes J \cong IJ$.
Se $J = I$ allora $r(I \otimes I) = r(I)^2 = r(I^2)$ da cui segue che deve essere $r(I) \leq 1$ e quindi A è a ideali principali.
Per provare che A è PID: se $IJ = 0$ allora $I \otimes J = 0$ ed essendo A locale si ottiene che si deve avere o $I = 0$ o $J = 0$.

Esercizio 3. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false? Provare se vere, dare un controesempio se false.

i) Ogni ideale massimale in $\mathbb{Z}_{(2)}[x]$ ha non meno di due generatori.

ii) $M = (\mathbb{Z}/(15) \oplus \mathbb{Z}/(18))_{(3)}$ è ciclico.

iii) Sia M_a lo $\mathbb{Z}$-modulo generato da elementi m_1, m_2, m_3 che soddisfano le relazioni $2m_1 - m_2 = 0, m_1 + m_2 +$

$m_3 = 0, m_1 + am_2 = 0$, $a \in \mathbb{Z}$. Per ogni $0 < a \in \mathbb{Z}$ esistono dei valori $n \in \mathbb{N}$ per cui $M_a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n \neq 0$.

Soluzione i) Falso: L'ideale $(2x+1)$ è principale e massimale dato che $\mathbb{Z}_{(2)}[x]/(2x+1) \cong \mathbb{Q}$.
ii) Falso. $M = (\mathbb{Z}/(15) \oplus \mathbb{Z}/(18))_{(3)} \cong \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(9)$ che non è ciclico.
iii) Vero. La matrice delle relazioni per M

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha forma di Smith

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

da cui segue che $M \cong \mathbb{Z}/(2a+1)$.
Se $a > 0$, $2a+1 \neq \pm 1$, quindi per ogni n tale che $\gcd(2a+1, n) \neq 1$, $M_a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n \neq 0$.

Esercizio 4. Sia $I = (xz-yz, y^2-z, xyz-1) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$
.

i) Trovare in I, se esiste, un polinomio univariato in y,

ii) Trovare l'insieme

$$\Sigma = \{q(y) \in \mathbb{Q}[y] \mid V_{\mathbb{Q}}((q, I)) \neq \emptyset\}$$

(dove $V_{\mathbb{Q}}(I) = \{\alpha \in \mathbb{Q}^3 \mid f(\alpha) = 0, \forall f \in I\}$).

iii) Σ e' un ideale?

Soluzione. i) la base di Gröbner ridotta rispetto all'ordinamento lex $x > z > y$ e' $I = (x - y, z - y^2, y^4 - 1)$ e quindi $I \cap \mathbb{Q}[y] = (y^4 - 1)$.
ii)-iii) Per il teorema degli zeri, $V_{\mathbb{C}}(q, I) = \emptyset$ se e solo se $(q, I) = 1$, quindi condizione necessaria per appartenere a Σ è che $\gcd(q(y), y^4 - 1) \neq 1$. Sicuramente quindi $y + 1$ e $y - 1$ appartengono a Σ mentre $y^2 + 1 \notin \Sigma$. Quindi $\Sigma = (y - 1) \cup (y + 1)$ e quindi non è un ideale.