Algebra II - 16 Dicembre 2014

Esercizio 1. Sia M lo $\mathbb{Z}$-modulo generato da elementi v_1, v_2, v_3, v_4 che soddisfano le relazioni:

$$3v_1 = 0,\ av_1 + 3v_2 = 0,\ bv_2 + 3v_3 = 0$$

con $a, b, \in \mathbb{Z},\ \gcd(a, b) = 1$.
Descrivere $T(M)$, il sottodulo di torsione di M, al variare di $a, b, \in \mathbb{Z}$.
Soluzione. $M \cong \mathbb{Z}^4/coker(\varphi)$, dove $\varphi : \mathbb{Z}^4 \longrightarrow \mathbb{Z}^4$ è l'omomorfismo rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la forma di Smith di A consideriamo gli ideali $\Delta_1 = (3, a, b) = (1)$, $\Delta_2 = (9, 3a, 3b, ab)$, $\Delta_3 = (27)$.
Se $(3, ab) = 1$ allora $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = (27)$ quindi $M \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(27)$ e $T(M) \cong \mathbb{Z}/(27)$.
Se $(3, ab) = 3$ allora, $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = (27)$ quindi $M \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(9)$ e $T(M) \cong \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(9)$.

Esercizio 2. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa. Provare o dare un controesempio:

1. Se A è un anello e $I \subset A$ un ideale. Se $\mathfrak{N}(A/I) = 0$ allora I è primo, ($\mathfrak{N}(A/I)$ è il nilradicale di A/I).
2. $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1) \otimes_{\mathbb{Q}[x]} \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1) = 0$.
3. Se $A[x_1, ., x_n]$ è noetheriano allora A è un anello noetheriano.

4. Sia $I \subset K[x_1, .., x_n]$ un ideale e sia $<$ un ordinamento monomiale. Se $Lt_<(I)$ è primo allora I è primo.

Soluzione. 1. Falso. $\mathfrak{N}(A/I) = 0$ significa che $I = \sqrt{I}$. Ad esempio $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/(6)) = 0$ ma (6) non è primo in $\mathbb{Z}$.
2. Vero. $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1) \otimes_{\mathbb{Q}[x]} \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1, x^2 - 1) = (0)$.
3. Vero. Dato che $A \cong A[x_1, .., x_n]/(x_1, .., x_n)$. Basta considerare la successione esatta (di A-moduli)

$$0 \longrightarrow (x_1, .., x_n) \longrightarrow A[x_1, .., x_n] \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

4. Vero. Se $Lt_<(I)$ è primo allora $Lt_<(I) = (x_{i_1}, .., x_{i_s})$ quindi $K[x_1, .., x_n]/I \cong K[x_{j_1}, .., x_{j_t}]$, (con $i_k \neq j_r$) è un dominio e quindi I è primo.

Esercizio 3. Consideriamo l'ideale

$$I = (3x^2 + 10y - 2, (x + y)^3, 45) \subset \mathbb{Z}[x, y]$$

e sia $A = \mathbb{Z}[x, y]/I$.

1. Trovare i divisori di zero in A
2. Trovare, se esiste, un ideale primo $\mathfrak{p} \subset A$ per cui $A_\mathfrak{p}$ non e' un dominio.

Soluzione 1. Se $I \subset \mathfrak{p}$ allora $(I, 3) \subset \mathfrak{p}$ oppure $(I, 5) \subset \mathfrak{p}$. Si ha $(I, 3) = (y - 2, (x + 2)^3, 3)$ da cui $\sqrt{(I, 3)} = (x + 2, y - 2, 3)$ che è massimale. Analogamente $(I, 5) = (x^2 - 4, (x + y)^3, 5) = (x + 2, (y - 2)^3, 5) \cap (x - 2, (y + 2)^3, 5)$ che sono primari (dato che il loro radicale è massimale). Allora

$$\mathfrak{D}(A) = (x + 2, y - 2, 3) \cup (x + 2, y - 2, 5) \cup (x - 2, y + 2, 5)$$

2. Dato che $I = (I, 9) \cap (I, 5) = (I, 9) \cap (x+2, y-2, 5) \cap (x-2, y+2, 5)$ e gli ideali sono comassimali, si ha $A \cong \mathbb{Z}[x,y]/(I,9) \oplus \mathbb{Z}[x,y]/(x+2,(y-2)^3,5) \oplus \mathbb{Z}[x,y]/(x-2,(y+2)^3,5) \cong \mathbb{Z}[x,y]/(I,9) \oplus \mathbb{Z}/(5)[y]/(y-2)^3 \oplus \mathbb{Z}/(5)[y]/(y+2)^3$.
Allora $A_{\mathfrak{m}_1} \cong \mathbb{Z}[x,y]/(I,9)$, $A_{\mathfrak{m}_2} \cong (\mathbb{Z}/(5))[y]/(y-2)^3$, $A_{\mathfrak{m}_3} \cong (\mathbb{Z}/(5))[y]/(y+2)^3$ e per ogni $\mathfrak{p} \subset A$, $A_{\mathfrak{p}}$ non è un dominio.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2 - yzt, t - yt, zt - y)$ ideale in $\mathbb{C}[x, y, z, t]$

i) Calcolare una base di Gröbner ridotta di I.

ii) trovare le componenti irriducibili di $V(I)$.

iii) Se $f = xt + y$ e' vero che $f \in I$?

Soluzione.1. La base ridotta rispetto all'ordinamento lex, con $x > y > z > t$, è $\{x^2 - zt, y - zt, zt^2 - t\}$, quindi l'ideale non è zero dimensionale e $V(I)$ non è finita.
2. $\sqrt{I} = \sqrt{(x^2 - zt, y - zt, t)} \cap \sqrt{x^2 - zt, y - zt, zt - 1} = (x, y, t) \cap (x+1, y-1, zt-1) \cap (x-1, y-1, zt-1)$ che, essendo primi, determinano le componenti irriducibili di $V(I)$.
3. Dato che $lt_>(f) = xt \notin Lt_>(I) = (x^2, y, zt^2)$ allora $f \notin I$.