Algebra II - 13 Gennaio 2015
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Sia M un A-modulo tale che $\mathfrak{m}M \neq M$ per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$. Provare che:

1. Per ogni ideale (proprio) $I \subset A$ si ha $M/IM \neq 0$.
2. Se M è piatto per ogni A-modulo $N \neq 0$, $M \otimes N \neq 0$.

Soluzione 1. Se I è un ideale proprio di A esiste $\mathfrak{m}$ massimale tale che $I \subseteq \mathfrak{m}$, quindi $IM \subset \mathfrak{m}M \subsetneq M$ da cui la tesi.
2. Sia $0 \neq n \in N$ e sia $N_1 =< n >\cong A/\mathrm{Ann}(n)$. Se si considera l'omomorfismo iniettivo $f : N_1 \longrightarrow N$ per la piattezza di M si ottiene che $\bar{f} : N_1 \otimes M \cong M/\mathrm{Ann}(n) \longrightarrow N \otimes M$ è un omomorfismo iniettivo, quindi dal punto 1 segue che $N \otimes M \neq 0$.

Esercizio 2. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa. Provare o dare un controesempio:

1. Se $I, J \subset A$ sono ideali $\sqrt{I : J} \subseteq \sqrt{I} : \sqrt{J}$?
2. Se esistono $I, J \subset A$ ideali massimali tali che $I \cap J = (0)$ allora A è artiniano?
3. Siano M, N A-moduli, con A dominio, indichiamo con $\mathrm{T}(M) = \{m \in M \mid \mathrm{Ann}(m) \neq 0\}$.
   Vale $\mathrm{T}(M \otimes N) = \mathrm{T}(M) \otimes \mathrm{T}(N)$?
4. Siano $f, g \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$ e $I = (f, g)$.
   Vale $V_{\mathbb{C}}(I)$ è infinito $\Longleftrightarrow \gcd(f, g) \neq 1$?

Soluzione 1. VERA. Sia $b \in \sqrt{I : J}$, allora esiste n tale che $b^n J \subseteq I$. Dobbiamo provare che se $c \in \sqrt{J}$ allora $bc \in \sqrt{I}$. Dato che esiste m tale che $c^m \in J$ vale $b^n c^m \in I$. Se $n \geq m$ moltiplicando per c^{n-m} si ottiene $(bc)^n \in I$, da cui segue $bc \in \sqrt{I}$, (analogo se $n \leq m$).
2. VERA. Dato che I, J sono massimali e $I \cap J = (0)$ si ha $A \cong A/I \oplus A/J$ ossia A è somma diretta di campi e quindi artiniano.
3. FALSA. Consideriamo gli $\mathbb{Z}$ moduli $M = \mathbb{Z}/(4)$ e $N = \mathbb{Z}$, allora $T(M \otimes_{\mathbb{Z}} N) = T(M) = \mathbb{Z}/(4)$. Invece $T(M) \otimes T(N) = \mathbb{Z}/(4) \otimes 0 = 0$.

4. VERA. "$\Longrightarrow$" : se $\gcd(f,g) = 1$ i polinomi $p(x) = \mathrm{Ris}_y(f,g)$ e $q(y) = \mathrm{Ris}_x(f,g)$ sono diversi da zero e $p(x), q(y) \in I$. Quindi $I \subsetneq \mathbb{C}[x,y]$, ha dimensione zero e $V_{\mathbb{C}}(I)$ è finito.
"$\Longleftarrow$" : se $h(x,y) = \gcd(f,g) \neq 1$ e $f = f_1 h$ e $g = g_1 h$ allora $V_{\mathbb{C}}(I) = V(h) \cup V(f_1, g_1)$. Basta allora provare che $V_{\mathbb{C}}(h)$ è infinito. Infatti dato che siamo su un campo algebricamente chiuso per ogni $b \in \mathbb{C}$ esistono soluzioni di $h(x,b) = 0$ purche' $\mathrm{lc}_x(h)(b) \neq 0$, ma dato che esistono al piu' solo un numero finito di $b \in \mathbb{C}$ con questa proprietà $V_{\mathbb{C}}(h)$ è infinito.

Esercizio 3. Sia A un anello finito e $S \subset A$ un insieme moltiplicativamente chiuso. Sia $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ l'omomorfismo canonico dato da $f(a) = \frac{a}{1}$. Provare che

1. Se f è iniettivo allora $A \cong S^{-1}A$.
2. f è un omomorfismo surgettivo.
3. Sia $A = \mathbb{Z}/(24)$ e $S = \{s \equiv 2^n \pmod{24} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e sia $f : A \longrightarrow S^{-1}A$. Trovare $\mathrm{Ker}(f)$ e $S^{-1}A$.

Soluzione Osserviamo innanzitutto che dato che A è finito si ha $A = A^* \cup \mathfrak{D}(A)$.
1. Se f è iniettivo $S \cap \mathfrak{D}(A) = \emptyset$ e quindi $S \subseteq A^*$. Per la proprietà universale dell'anello delle frazioni esiste $h : S^{-1}A \longrightarrow A$ tale che $h(\frac{a}{s}) = as^{-1}$. Dato che si ha anche per ogni $b \in A$, $b = (bs)s^{-1} = h(\frac{bs}{s})$, in questo caso f è un isomorfismo.
2. Sia $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ proviamo che esiste $b \in A$ tale che $\frac{a}{s} = \frac{b}{1}$. Dato che S è un insieme finito, se $s \in S$ esistono $r \neq k \in \mathbb{N}$ tali che $s^k = s^r$. Se $k = r + t$ allora $\frac{a}{s} = \frac{as^{t-1}}{1}$, infatti esiste $u = s^r \in S$ tale che $u(a - as^t) = 0$.
3. $\mathrm{Ker}(f) = \{a \in A \mid \exists s \in S \ as = 0\} = 3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, quindi $A/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{Z}/(3)$, e $S^{-1}A \cong \mathbb{Z}/(3)$.

Esercizio 4. Dato il sistema di equazioni polinomiali:

$$\begin{cases} x + y &= a \\ x^2 + y^2 &= a^2 \\ x^3 + y^3 &= a^5 \end{cases}$$

determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ esistono soluzioni in $\mathbb{C}^2$ e in tal caso calcolarle.

Soluzione La basie di Gröbner ridotta dell'ideale $I = (x + y - a, x^2 + y^2 - a^2, x^3 + y^3 - a^5)$ rispetto all'ordine lessografico con $x > y > a$ è $(x + y - a, y^2 - ay, a^5 - a^3)$, quindi esistono soluzioni se $a^5 - a^3 = a^3(a+1)(a-1) = 0$. Sostituendo si ottiene:

i) se $a = 0$ esiste solo la soluzione $(0, 0)$.

ii) se $a = -1$ esistono due soluzioni $(-1, 0)$ e $(0, -1)$

iii) se $a = 1$ esistono due soluzioni $(1, 0)$ e $(0, 1)$.