Algebra II - 20- Febbraio 2015
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa. Provare o dare un controesempio:

1. Se A un anello commutativo con identità tale che ogni sottomodulo di un A-modulo libero è libero allora A è PID.

2. Sia $A_{\alpha,\beta}$ una matrice 6×6 a coefficienti in $\mathbb{R}$, con polinomio caratteristico $p_A(x) = (x-1)^\alpha(x-2)^\beta(x^2+1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Esistono valori di α e β per cui le possibili forme canoniche di Smith delle matrici caratteristiche $A_{\alpha,\beta} - xI$ sono esattamente 4.

3. Se A è un anello locale allora esistono un anello B e un primo $\mathfrak{p} \subset B$ tali che $A \cong B_\mathfrak{p}$.

4. Il polinomio $p(x) = 30x^5+60x^3+90x+7$ è un'unità in $\mathbb{Z}/(540)[x]$.

Soluzione. 1. VERO. Dato che A è libero su stesso allora ogni ideale $I \subset A$ è libero. Dal fatto che $I = (a)$ è libero segue che A è un dominio. Inoltre se I non è principale e $\{a_1, a_2, ..\}$ è una sua base, si ha che $a_1a_2 = a_2a_1$ cosí esiste una relazione non banale fra gli elementi della base.
2. VERO. Le possibili forme di Smith di $a - xI$ sono matrici diagonali con sulla diagonale elementi $d_1|d_2|..|d_6$ tali che $d_1..d_6 = (x-1)^\alpha(x-2)^\beta(x^2+1)$. Dalle condizioni di divisibilità segue che (x^2+1) deve essere un fattore di d_6, che $d_1 = d_2 = 1$, che $\alpha + \beta = 4$ e che le successioni dei possibili esponenti γ_i di $(x-1)$ in d_i devono soddisfare le seguenti relazioni: $\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 = \alpha$, $\gamma_3 \le \gamma_4 \le \gamma_5 \le \gamma_6$, (analogamente per gli esponenti di $(x-2)$). Si ha quindi: $\cup_{\alpha=0}^4\{(\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \alpha)\} = \{((0,0,0,0,0)\} \cup \{(0,0,0,1,1\} \cup \{(0,0,0,2,2), (0,0,1,1,2)\} \cup \{(0,0,0,3,3), (0,0,1,2,3), (0,1,1,1,3)\} \cup \{(0,0,0,4,4), (0,0,1,3,4), (0,0,2,2,4), (0,1,1,2,4), (1,1,1,1,4)\}$. Dal fatto che per gli esponenti di $(x-2)$ valgono le stesse relazioni e $\alpha+\beta = 4$ segue che l'unica scelta per cui esistono 4 distinte forme di Smith si ha per $\alpha = \beta = 2$.
3. VERO. Basta considerare $B = A$ e $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_A$ l'ideale massimale di A. Dato che $\mathfrak{m}_A$ contiene tutti gli elementi non invertibili di A, $A_{\mathfrak{m}_A} \cong A$.

4. VERO. Un polinomio $\sum_i a_i x^i \in A[x]$ é unità se e solo se a_0 è un'unità e a_i è nilpotente per ogni $i > 0$. Dato che $\sqrt{(540)} = (30)$, il polinomio $p(x)$ è un'unità.

Esercizio 2. Sia $I \subset A$ un ideale tale che A/I è un A-modulo piatto. Provare che $I/I^2 = (0)$.
Soluzione. Consideriamo l'immersione $j : I \longrightarrow A$. Dato che A/I è piatto su A anche $j \otimes id_A : I \otimes_A A/I \longrightarrow A \otimes_A A/I \cong A/I$ è iniettivo. Dato che $(j \otimes id_A)(a \otimes b) = 1 \otimes ab = 0$ per ogni $a \in I$ si ottiene che $(j \otimes id_A)(I \otimes_A A/I) = (0)$. La tesi segue allora dal fatto che $I \otimes_A A/I \cong I/I^2$.

Esercizio 3. Sia K un campo, $A = K[x]_{(x)}$ e M il campo delle frazioni di A

1. Provare che $M/(x)M$ è un A modulo finitamente generato.
2. Provare che M non è un A modulo finitamente generato.

Soluzione. 1. La struttura di A modulo di M è definita dall'omomorfismo canonico $a \longrightarrow \frac{a}{1}$. Si ha che $M = K(x)$ e che $M = (x)M$ infatti $m = x\frac{m}{x}$, quindi $M/(x)M = 0$ che è ovviamente finitamente generato.
2. Dato che A è locale con ideale massimale (x), e $M = (x)M$ se M fosse finitamente generato, per Nakayama, si avrebbe $M = 0$.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2y + xz + yz, y^2z) \subset \mathbb{R}[x, y, z]$ e indichiamo con $A = \mathbb{R}[x, y, z]/I$.

1. Calcolare la base di Gröbner ridotta di I, rispetto all'ordinamento lessicografico $x > y > z$.
2. Trovare gli elementi nilpotenti di A.
3. Provare che $(x^2y^3, y^3z) \subset I \subset (x^2, z)$
4. Se $\mathfrak{p} = (x, z) \subset A$, trovare $A_{\mathfrak{p}}$.

Soluzione. 1. La base di Gröbner ridotta è

$$\{x^2y + xz + yz, xyz^2, xz^3 + yz^3, y^2z\}.$$

2.Gli elementi nilpotenti di A sono le immagini in A degli elementi di $\sqrt{I} = (xy, xz, yz)$.
3. Ogni elemento di (x^2y^3, y^3z) riduce a zero modulo la base di Gröbner di I e ogni elemento di riduce a zero modulo (x^2, z), (che è anche base di Gröbner).
4. Dal punto 2 segue che i primi minimali di I sono $\mathfrak{p} = (x, z) = \sqrt{(x^2, z)}$, (x, y) e (y, z). Dal punto 3 si ha che $IA_{\mathfrak{p}} = (x^2, z)$ (dato che y è invertibile in $A_{\mathfrak{p}}$) e quindi $A_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}[x, z]/(x^2, z)$.