Algebra II - 16 Febbraio 2016

Esercizio 1. Sia A un anello commutativo con identità Noetheriano e siano $I_1, I_2 \subsetneq A$ ideali. Dimostrare che $I_1 : I_2 = I_1$ se e solo se $I_2 \not\subseteq \mathfrak{p}$ per ogni $\mathfrak{p}$ primo associato di I_1.

Esercizio 2. Sia $I \subset A$ un ideale nilpotente e siano M, N A-moduli. Provare che, se $\varphi : M \longrightarrow N$ è un omomorfismo di moduli tale che l'omomorfismo indotto $\overline{\varphi} : M/IM \longrightarrow N/IN$ è surgettivo, allora anche φ è surgettivo.

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false. Provare o dare un controesempio.

1. Se M è uno $\mathbb{Z}$- modulo e N è un $\mathbb{Q}$-modulo, allora si ha $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, N)$ come gruppi abeliani.
2. Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello Noetheriano locale e $\mathfrak{q} \subset A$ è un ideale $\mathfrak{m}$-primario, allora $A/\mathfrak{q}$ è Artiniano.
3. Se M e N sono $\mathbb{Z}$-moduli finitamente generati e $M \oplus M = N \oplus N$, allora $M = N$.
4. Sia $\varphi_c : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$, $c \in \mathbb{Z}$, l'omomorfismo definito da
$$\varphi_c(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, cx_2 + x_3, x_1 - cx_2 - cx_3), \;\; c \in \mathbb{Z}.$$
Per ogni $c, d \in \mathbb{Z}$, con $c \neq d$, si ha che $\mathrm{Coker}\varphi_c \ncong \mathrm{Coker}\varphi_d$.
5. Siano $I \subseteq J \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ideali e $>$ un ordinamento monomiale. Se $\mathrm{Lt}_>(I) = \mathrm{Lt}_>(J)$ allora $I = J$.

Esercizio 4. Sia $I \subset \mathbb{Q}[x, y, z, t]$
$$I = (x^2z - 2xy^3, x^2z - x^2t^3 + 3xy^3, 2x^2t^3 - xy^3)$$
e sia $A = \mathbb{Q}[x, y, z, t]/I$.

1. Trovare il nilradicale $\mathcal{N}(A)$.
2. Trovare l'insieme dei divisori di zero $\mathcal{D}(A)$.
3. Sia $\mathfrak{p} = (x, y, z, t) \subset \mathbb{Q}[x, y, z, t]$. Trovare gli ideali primi monomiali di $A_{\mathfrak{p}}$.