Algebra II - 8 Giugno 2015

Esercizio 1. i) Sia M un A-modulo finitamente generato e $\mathfrak{p} \subset A$ un ideale primo, allora $M_{\mathfrak{p}} = 0$ se e solo se $\mathrm{Ann}(M) \not\subset \mathfrak{p}$.
ii) Sia A un anello e $0 \neq I \subset A$ un ideale finitamente generato. Se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$ si ha $I_{\mathfrak{m}} = 0$ oppure $I_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}$ allora I è principale ed è generato da un elemento idempotente.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

i) Se A è un anello e $I \subset A$ un ideale allora $A^n/IA^n \cong (A/I)^n$

ii) Se $p(x) \in K[x]$, con K campo qualunque, è un polinomio irriducibile l'ideale $(p(x), p(y))$ è primo in $K[x, y]$.

iii) Se M è un A-modulo proiettivo e $N \subset M$ un sottomodulo, allora N è proiettivo

Esercizio 3. Se M uno $\mathbb{Z}$-modulo tale che la successione:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^4 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $f(x, y, z) = (x+y+z, -3x+y+z, x-3y-3z, x+3y+z)$ è esatta. Esprimere M come somma diretta di $\mathbb{Z}$-moduli ciclici.

Esercizio 4. Un A-modulo M si dice semplice se $M \neq 0$ e se non ha sottomoduli propri non banali.

i) Un A-modulo è semplice se e solo se è isomorfo ad $A/\mathfrak{m}$ con $\mathfrak{m}$ ideale massimale.

ii) Se M, N sono A moduli semplici e $\varphi : M \longrightarrow N$ un omomorfismo di A moduli, allora φ è l'omomorfismo nullo o un isomorfismo.

iii) Se M è semplice e $\mathfrak{J}(A)$ è il radicale di Jacobson di A allora $\mathfrak{J}(A)M = 0$.

iv) Se A è noetheriano e $\mathrm{Ann}(M) \neq 0$ è un ideale di dimensione zero, allora M contiene un sottomodulo semplice.

Esercizio 5. Sia $I = (y^2 - xz, x^2 - y^2, x^2 - yz) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$. Indichiamo con $A = \mathbb{Q}[x, y, z]/I$.

i) Calcolare la base di Gröbner ridotta con lex $x > y > z$.

ii) Trovare le componenti irriducibili di $\mathbf{V}(I)$

iii) Calcolare $S^{-1}A$ con $S = A \setminus (x, y)A$